12. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita

D: Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ je *unimodulární*, pokud $\det M \in \{-1, 1\}$.

D: Matice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1.

T: Uvažme lineární program $\max c^T x$, $Ax \le b$, $x \ge 0$, kde b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty**):** Uvažme celočíselný program ILP: $\max c^T x$, $Ax \le b$, $x \ge 0$, $x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci LP: $\max c^T x$, $Ax \le b$, $x \ge 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP.

T(Vlastnosti determinantu**):** Nechť A je čtvercová matice, B vznikla z A přenásobením nějakého řádku konstatou c a C vznikla z A prohozením dvou řádků. Potom platí:

$$\det B = c \cdot \det A \qquad \det C = -\det A.$$

T(Laplaceův rozvoj**):** Nechť A je čtvercová matice $n \times n$, označme A_{ij} matici A po smazání i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak pro libovolné $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} && \text{rozvoj přes řádek}\\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj} && \text{rozvoj přes sloupec}\end{aligned}$$

Příklad první Nechť A je totálně unimodulární matice. Dokažte následující:

- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo -1.
- Ukažte, že A^T, $\binom{A}{-A}$ a $(A|B)$ jsou totálně unimodulární matice, kde B je matice s libovolně mnoha sloupci, která má v každém sloupci právě jednu jednotku a zbytek nuly.

Příklad druhý Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$.
- Každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B, nebo oba patří do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

Příklad třetí Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

Příklad čtvrtý Rozhodněte, jestli je zadaná matice totálně unimodulární:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad pátý Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

Příklad šestý Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?