14. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Máte hlad? Dejte si matroid!

D: *Matroid* je dvojice (S, I), kde S je libovolná konečná množina, $I \subseteq 2^S$ splňující:

(1) $\emptyset \in I$
(2) $J' \subseteq J \in I \Rightarrow J' \in I$
(3) Pro každé $A \subseteq S$ platí, že pokud $X, Y \subseteq A; X, Y \in I$ jsou obě maximální v inkluzi, pak $|X| = |Y|$.

Prvkům I se říká *nezávislé množiny*, v inluzi maximálním prvkům I se říká I.

Rank množiny $A \subset S$ $\mathrm{r}(A)$ je velikost maximální množiny $J \subseteq A; J \in I$.

T(O výměně**):**

Množina $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ je systém všech bází nějakého matroidu na S, právě když $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\colon\ \forall a \in (B_1 \setminus B_2)\ \exists b \in (B_2 \setminus B_1) \text{ tž. } B_1 \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}.$$

Jinak řečeno, pokud vyměním jeden prvek báze za prvek jiné báze, opět dostanu bázi.

D(Hladový algoritmus**):**

VSTUP: Systém (S, I), $I \subseteq 2^S$, váhy prvků $c : S \to \mathbb{R}$
VÝSTUP: $A \in I$ takové, že má $c(A)$ největší možné.

1. $A = \emptyset$
2. Dokud existuje $e \in S$ tž. $c_e >$ a $A \cup \{e\} \in I$:
3. Vyber z takových e to s největším c_e
4. $A = A \cup \{e\}$

T: Je-li (S, I) matroid, hladový algoritmus vydá optimální řešení pro libovolné váhy prvků.

Příklad první   Rozhodněte (a dokažte), zda jsou následující struktury (S, I) matroidy:

1. $I = \{J \subseteq S : |J| \leq k\}$
2. $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, kde S_i jsou po dvou disjunktní; $I = \{J \subseteq S : \forall i\, |S_i \cap J| \leq 1\}$
3. Totéž co 2., jen jedničku nahradíme obecným k_i (tj. $|S_i \cap J| \leq k_i$)
4. $S = V$ pro graf $G = (V, E)$, I obsahuje všechny nezávislé množiny v G (v tom grafovém smyslu, tj. množiny vrcholů takové, že mezi nimi nevede žádná hrana)
5. $S = E$ pro graf $G = (V, E)$, I obsahuje všechny acyklické podmnožiny hran
6. S je konečná podmnožina vektorů z nějakého vektorového prostoru, I obsahuje všechny lineárně nezávislé množiny
7. $S = E$ pro graf $G = (V, E)$, I obsahuje všechna párování v G

Pro matroidy potom zjitěte, jak vypadají jejich báze a co je rank.

Příklad druhý   Nechť (S, I) je matroid, dokažte, že potom i (S, I_k) je matroid pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, kde $I_k = \{J \in I : |J| \leq k\}$.

Příklad třetí   Dokažte, že v defici matroidu můžeme nahradit axiom (3) za následující axiom:
(3') Pro každé $X, Y \in I$, splňující $|Y| > |X|$ existuje $e \in (Y \setminus X)$, takové, že $X \cup \{e\} \in I$ Jinak řečeno, dokažte, že (1), (2), (3) $\Leftrightarrow$ (1), (2), (3').

Hlavní chod na druhé straně!

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Dokažte ještě jinou ekvivalentní definici matroidu – axiom (3) můžeme nahradit axiomem:
(3") Pro livobolné váhy $c : S \to \mathbb{R}$ vydá hladový algoritmus správné řešení.

Hint: Implikaci $\Rightarrow$ dokazujte sporem (resp. obměnou). Pro začátek předpokládejte, že $A = S$ a že X a Y jsou disjunktní. Chcete rozbít hladový algoritmus, potřebujete tedy šikovně zvolit váhy tak, aby si algoritmus vybral tu menší z množin, ale ta měla malou váhu.