14. CVIČENÍ Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD
Bonusový domácí úkol

Deadline na odevzdání je 29. 6.

Čtvrtý domácí úkol **[4 body]**

Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ je systém množin, řekneme, že $\mathcal{F}$ je *laminární*, pokud pro každé $A, B \in \mathcal{F}$ platí buď $A \subseteq B$, nebo $B \subseteq A$, nebo $A \cap B = \emptyset$. Mějme tedy laminární systém $\mathcal{F}$ a nějaké přirozené číslo k. Dokažte, že potom (S, I) pro $I = \{X \subseteq S : \forall B \in \mathcal{F}\, |B \cap X| \leq k\}$ je matroid (podle definice matroidu z přednášky).

Hint: Může se vám hodit dokázat, že pokud $X, Y \in I$ splňují $|X| > |Y|$, pak buď existuje $B \in \mathcal{F}$ takové, že $|X \cap B| > |Y \cap B|$, nebo $(X \setminus Y) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \neq \emptyset$. Jedna z možností jak to udělat je například si skrze laminaritu chytře zredukovat $\mathcal{F}$ na systém $\mathcal{F}'$, ve kterém jsou všechny množiny disjunktní. Jakmile máte takové B, můžete najít spor s maximalitou Y.