

## Kocourkovský elektromobilní problém

[25 bodů]

Elektromobilita v Kocourkově! Geniální kocourkovský miliardář Leon Tusk předvedl na motoristickém veletrhu svůj zbrusu nový elektromobil Edison. Kocourkovští byli tak uneseni, že okamžitě skupili veškeré Tuskovy Edisony a radním města nezbylo než zařídit několik dobíjecích stanic. Jak se však záhy ukázalo, kocourkovská rozvodná síť není schopna dobíjecí stanice zásobovat v těch největších špičkách<sup>1</sup>. Od téměř jisté katastrofy zachránil Kocourkov opět Leon<sup>2</sup>. Ten nabídl, že do dobíjecích stanic zapůjčí (za drobný poplatek, samozřejmě) baterie, které je možno mimo špičku nabít a poté ve špičce použít k dobíjení elektromobilů.

Nyní by kocourkovského radního pro finance zajímalo, jak distribuovat energii v rozvodné síti tak, aby zaplatil za pronájem Tuskových baterií co nejméně, než se podaří prosadit zákon o ETE (evidence Tuskových Edisonů), který na elektromobilisty uvalí takové poplatky, že jim nezbyde než Edisony prodat a celý problém se tím vyřeší. A vaším úkolem bude mu s tím pomoci (tedy, s poplatky za baterie, ne s ETE).

Nyní trochu formálněji. Kocourkovskou rozvodnou síť je možné si představit jako neorientovaný graf  $G = (V, E)$  s  $n$  vrcholy  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a  $m$  hranami  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Vrchol  $v_1$  je kocourkovská elektrárna. Dobíjecí stanice se nacházejí právě ve vrcholech (včetně elektrárny).

Zatímco kocourkovská elektrárna dokáže vyprodukovat neomezené množství energie, přenosová kapacita jednotlivých spojů je naopak velmi omezená. Pro každou hranu  $e_i$  víme, že za den dokáže přenést nejvýše  $c_i$  kWh energie<sup>3</sup>.

Radním se podařilo provést extensivní průzkum trhu, díky kterému odhalili, jaký bude odběr energie z jednotlivých stanic v  $t$  dnech před zavedením ETE. Jinak řečeno, je známo, že ve stanici-vrcholu  $i$  musí být  $j$ -tý den k dispozici  $a_{ij}$  kWh energie. Jelikož někdy bude toto číslo větší než kolik jsme do příslušné stanice schopni v průběhu dne přivést, tak máme k dispozici baterie, které můžeme v předcházejících dnech ze sítě nabít, abychom následně byli schopni pokrýt zvýšenou poptávku po elektrické energii. Energii z baterie je možné využít ve stejném vrcholu nebo rozvodnou sítí převést do jiných vrcholů za podmínky, že celková přenesená energie nepřekročí kapacitu jednotlivých hran. Požadavky na odběr energie  $a_{ij}$  je nutné zajistit každý den  $j$  a baterie v elektromobilech není možné používat v jiných dnech a ani nelze elektromobily používat k převozu energie do jiných vrcholů.

Experimenty však ukázaly, že ne každá stanice je schopná využívat Tuskovy baterie<sup>4</sup>. Nakonec bylo vybráno celkem  $p$  stanic  $b_1, b_2, \dots, b_p$  nacházejících se ve vrcholech  $v_{b_1}, v_{b_2}, \dots, v_{b_p}$ , do kterých je možné umístit baterie. Energii uloženou v baterii je ale možné využít dvěma způsoby – buď přímo k dobíjení elektromobilu, nebo je možné ji poslat dále do sítě

Za pronájem baterií si Tusk účtuje cenu dle kapacity půjčené baterie. Přesněji, pronájem baterie s kapacitou  $k$  kWh stojí  $k$  kocourkovských korun. Instalace baterií a vůbec veškerá manipulace s nimi je však náročná a nebezpečná. Je tedy nutné všechny baterie nainstalovat naráz, ještě před začátkem prvního dne, a poté není možné je jakkoliv přesouvat, zvyšovat jejich kapacitu atp, přičemž po instalaci, na začátku prvního dne, jsou všechny baterie úplně vybité. Pokud tedy například víme, že na konci prvního dne bude muset být v baterii ve stanici  $b_1$ , 10 kWh energie, na konci druhého dne 5 kWh a na konci třetího 12 kWh, musíme do  $b_1$  pořídit baterii s kapacitou 12 kWh za 12 kk. Radní pro finance tedy chce minimalizovat celkovou cenu za pronájem všech baterií.

<sup>1</sup>Například když kocourkovský supermarket vyhlásil neuvěřitelnou akci na máslo.

<sup>2</sup>Nespokojení řidiči, kterým se kvůli vybitým Edisonům rozteklo těžce nabyté máslo, hned den po incidentu demonstrovali před kocourkovskou radnicí. Nebýt Leonova uklidňujícího projevu, měli by radní doslova máslo na hlavě.

<sup>3</sup>kWh = kilo VeVerka hodina, energie vyprodukovaná tisícem veverek běžajících po dobu jedné hodiny v kolečku.

<sup>4</sup>Tytéž experimenty přesvědčili radního pro kulturu k nákupu několika Tuskových baterií a jejich zakomponování do novoročního ohňostroje.

Kocourkovští při stavbě sítě šetřili<sup>5</sup>, a tak je síť poměrně řídká, a rozhodně nemusí být souvislá<sup>6</sup>. Navíc, baterie jsou umístěny jen ve stanicích, ze kterých vedou alespoň tři vedení (tj. ve vrcholech stupně alespoň tři). Samozřejmě, ne každý vrchol stupně tři a více obsahuje baterii.

## Formát vstupu

Soubor s popisem sítě a požadavků má následující formát: První řádek má tvar „ $n$   $m$   $p$   $t$   $q$ “ a po řadě udává počet vrcholů  $n$ , počet hran  $m$ , počet stanic s bateriemi  $p$ , počet dní  $t$  a počet požadavků  $q$  (viz níže). Následuje  $m$  řádků popisujících hrany,  $i$ -tý řádek je tvaru „ $l$   $r$   $c$ “ a říká, že hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $l$  a  $r$  a má kapacitu  $c$ . Následuje jeden řádek tvaru „ $b_1$   $b_2$  . . .  $b_p$ “, obsahující  $p$  čísel  $b_1, b_2, \dots, b_p$ , které určují, v jakých vrcholech mohou být baterie.

A nakonec následuje  $q$  řádků s požadavky. Každý řádek je tvaru „ $j$   $i$   $a$ “ a říká, že  $a_{ij} = a$ , tedy že  $j$ -tý den musí být ve vrcholu  $v_i$  k dispozici  $a$  kWh energie.

Všechna čísla na vstupu jsou celá a nezáporná.

Příklad:

```
6 6 1 2 4
1 4 1
3 4 4
1 3 5
1 2 1
2 3 4
5 6 8
3
1 4 1
1 3 1
2 4 5
2 2 5
```

## Formát výstupu

LP může vypisovat jakékoli informace uznáte za vhodné, ale má-li problém optimální řešení, musí výstup obsahovat následující povinnou část: Povinná část je ohraničena řádky #OUTPUT: a #OUTPUT END. Na prvním řádku (hned po #OUTPUT:) vypište celkovou cenu za pronájem baterií. Následuje  $t$  řádků,  $x$ -tý řádek bude tvaru „ $f_1$   $f_2$   $f_3$  . . .  $f_m$ “, přičemž  $f_i$  je množství proudu, které teče hranou  $e_i$  v čase  $x$ . Znaménko  $f_i$  nechť určuje, kterým směrem proud teče – pokud  $e_i = \{v_k, v_l\}$ ,  $k > l$ , pak  $f_i$  je kladné pokud proud teče z  $v_k$  do  $v_l$  a záporné naopak.

Existuje-li pro vstup více optimálních řešení, vypište libovolné z nich.

Pokud problém nemá optimální řešení, pak musí výstup obsahovat řádek

```
PROBLEM HAS NO PRIMAL FEASIBLE SOLUTION
```

Speciálně, `glpsol` tento řádek vypisuje automaticky, pokud nenajde řešení.

Příklad pro vstup uvedený výše:

```
#OUTPUT:
3
-1 0 -4 0 0 0
-1 -4 -5 -1 4 0
#OUTPUT END
```

<sup>5</sup>Aby zbylo něco pro radní, samozřejmě.

<sup>6</sup>Viz experimenty s bateriemi.

## Hodnocení

Za korektní a zdokumentované řešení, byť vaše řešení bude triviální, můžete získat až 17 bodů. Pro získání všech 25 bodů musíte vytvořit „chytřejší“ model nebo implementovat nějakou vhodnou heuristiku, tak aby vaše řešení bylo rychlejší než triviální. Vstupy, na kterých budeme vaše řešení testovat budou podobná těm vzorovým, ale vaše řešení musí být schopné vydat správné řešení na libovolném korektním vstupu!