Příklady – 1. cvičení

Příklad 1

Dokažte, nebo vyvraťe následující tvrzení ($\triangle$ značí *symetrický množinový rozdíl* – $X \triangle Y = \{u \in X \cup Y \mid (u \in X \wedge u \notin Y) \vee (u \notin X \wedge u \in Y)\}$):

(a) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap C$

(b) $(A \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C)$

(c) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(d) $A \cap (C \triangle B) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(e) $A \cup (C \triangle B) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

Příklad 2

Dokažte matematickou indukcí:

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

(c)
$$\sum_{i=1}^{n} (4i+5) = 2n^2 + 7n$$

(d)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

(e)
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1}$$

Příklad 3

Dokažte matematickou indukcí (a jako bonus i bez ní) pro každé n přirozené:

(a) $4|(6n^2 + 2n)$

(b) $6|(n^3 + 5n)$

(c) $3|(4^{n+1} + 5)$

(d) $16|(9^{n+1} - 8n - 9)$

Příklad 4

Dokažte, že libovolnou celočíslnou částku peněz, větší než čtyři koruny, lze složit z dvou korun a pětikorun.

Příklad 5

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 5) \Rightarrow (2^n > n^2)$.

Příklad 6

Mějme posloupnost splňující $a_1 = 3$ a $a_n = a_{n-1} + 2n$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že platí $a_n = n^2 + n + 1$.