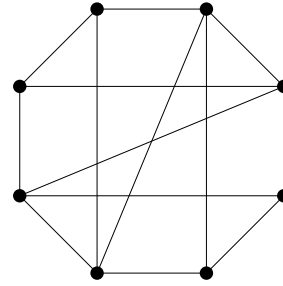


Příklady – 14. cvičení

Rovinné grafy a barvení

Příklad 1

Rohodněte, jestli je graf na obrázku rovinný či nikoli.



Příklad 2

Dokažte (umáchejte rukama), že pro každý graf G a jeho hranu e platí: G je rovinný právě když $G \setminus e$ je rovinný. ($G \setminus e$ značí rozdělení hrany e .) Dále ukažte, že pokud G je rovinný, pak i $G \cdot e$ je rovinný, ale ne naopak. ($G \cdot e$ značí kontrakci hrany e .)

Příklad 3

Dokažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků se dá obarvit čtyřmi barvami (chcete-li použít větu o čtyřech barvách, tak ji nejdříve dokažte :-)).

Příklad 4

Najděte graf, který je obarvitelný čtyřmi barvami, ale není rovinný.

Příklad 5

Najděte všechny grafy, které nelze nakreslit do prostoru bez křížení hran. (Nakreslení do prostoru je totéž, co nakreslení do roviny, jen \mathbb{R}^2 vyměníme za \mathbb{R}^3 .)

Příklad 6

Nakreslete K_5 a $K_{3,3}$ na torus (pneumatiku/americkou koblihu/hrnek s uchem/...).

Příklad 7

Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Příklad 8

Dokažte větu o třech barvách pro vnějškově rovinné grafy, t.j. pro grafy jež mají rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně.

Příklad 9

Dokažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení pěti hranově disjunktních lesů.

Příklad 10

Dokažte, že každý souvislý eulerovský rovinný graf lze nakreslit do roviny jedním uzavřeným nekřížícím se tahem (tah se může jen „dotýkat“ ve vrcholech).

Příklad 11

Existuje kubický (tj. 3-regulární) rovinný graf, který obsahuje:

- právě 12 šestiúhelníkových stěn (a žádné další)?
- právě 12 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?
- jednu dvacetíúhelníkovou stěnu a deset pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

Příklad 12

Charakterizujte

- takové souvislé rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku.
- takové souvislé rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku ani dvojici násobných hran.