Příklady – 2. cvičení

Příklad 1

Dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

(a) Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y, potom $|X| \leq |Y|$.

(b) Existuje-li zobrazení množiny X na Y, potom $|X| \geq |Y|$.

[Hint: použijte indukci podle velikosti jedné z množin]

Příklad 2

Ukažte, že pro zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě když f je na. Platí totéž i pro nekonečné množiny X? *[Hint: Použijte předchozí příklad a spor]*

Příklad 3

Určete počet relací na čtyřech prvcích: (a) všech, (b) reflexivních, (c) symetrických, (d) antisymetrických.

Příklad 4

Buď R a S reflexivní (symetrické) relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také reflexivní (symetrické)? (a) $R \cup S$, (b) $R \cap S$, (c) $R \setminus S$, (d) $R \triangle S$, (e) $R \circ S$, (f) R^{-1}.

Příklad 5

Rozhodněte, zda jsou následující relace ekvivalence a pokud ano určete třídy ekvivalence:

(a) $R_1 \subseteq \mathbb{N}^2$, $xR_1y \Leftrightarrow p|(x-y)$ $(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$,

(b) $R_2 \subseteq (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$, $xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$,

(c) $R_3 \subseteq \mathbb{N}^2$, $xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$. Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

Příklad 6

Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.

Příklad 7

Najděte:

(a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;

(b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$;

(c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)