Příklady – 4. cvičení

Počet zobrazení

Příklad 1

Kolik je matic $n \times n$, jejichž položky jsou čísla z $\{1, 2, \ldots, q\}$?

Příklad 2

Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (tj. nestáli na sousedních políčkách.)

Příklad 3

Určete počet

(a) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Kombinační čísla

Příklad 4

Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

(a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (b) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

Příklad 5

Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Příklad 6

Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky	V každé přihrádce je		
jsou	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Příklad 7

Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-blacK) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládame-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín 3C+2Y+M+K je stejný jako 2C+Y+3K.)

Příklad 8

Kolika způsoby lze dojít na Manhattanu z rohu 5. avenue a 15. street na roh 10. avenue a 23. street, pokud půjdeme pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem?

(V této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratek a bez slepých nebo přerušených ulic.)

Příklad 9

Kolik existuje různých správných uspořádání n párů závorek tak, že závorky lze správně spárovat (dobré uzávorkování)?

Příklad 10

(a) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

(b) Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu?

(c) A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodejnic?

(d) A co když máme mít v kruhu 6 vodníků a 12 čarodejnic?

Příklad 11

Mějme skupinu $n = 3k$ lidí a k stolků po třech. Kolikrát je třeba rozsadit tuto skupinu ke stolkům tak, aby se každá dvojice potkala právě jednou? Lze toto provést pro sudý počet stolků?

(Určete obecný vzorec pro n-člennou skupinu, stolky s s místy a t-tice lidí, kteří se mají potkat právě jednou.)

Příklad 12

Kolik je v konvexním n-úhelníku dvojic tětiv, jež se navzájem protínají uvnitř n-úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?

Příklad 13

Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Binomická věta a spol.

Příklad 14

Kolik má množina $X, |X| = n$ podmnožin sudé velikosti?

Příklad 15

Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

Příklad 16

Sečtěte: (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$