

Příklady – 8. cvičení

Zbytky kombinatoriky a PIE

Příklad 1

Kolika způsoby lze postavit do řady 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Maďary tak, aby všichni příslušníci stejného národa nestáli vedle sebe?

Příklad 2

Kolika způsoby lze dojít na Manhattanu z rohu 5. avenue a 15. street na roh 10. avenue a 23. street, pokud půjdeme pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem?

(V této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratk a bez slepých nebo přerušovaných ulic.)

Uspořádání

Příklad 3

Na množině \mathbb{N} nalezněte částečné uspořádání, které není lineární. A naopak nalezněte nějaké lineární uspořádání \mathbb{N} , které není „klasické“ uspořádání \leq .

Příklad 4

Uvažme relaci „ x je dělitelem čísla y “ na množině $\{1, \dots, n\}$.

- Dokažte, že tato relace je (neostré) uspořádání.
- Nakreslete Hasseho diagram této relace pro $n = 10$.
- Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?
- Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?
- Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Příklad 5

Které z následujících relací na množině \mathbb{N}^2 (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

- Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S: (a, b) \leq_S (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$
- Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U: (a, b) \leq_U (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$
- Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z: (a, b) \leq_Z (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$
- Slovníkové (lexikografické) porovnání $\leq_L: (a, b) \leq_L (x, y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$
- Slovníkovo-maximové porovnání $\leq_M: (a, b) \leq_M (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) < \max(x, y) \vee (a, b) \leq_L (x, y)$
- Maximové porovnání s tím, že nerozhodné případy se porovnají lexikograficky $\leq_N:$

$$(a, b) \leq_N (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) < \max(x, y) \vee [\max(a, b) = \max(x, y) \wedge (a, b) \leq_L (x, y)]$$

Příklad 6

U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký maximální řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.

