Domácí úkol – 1. cvičení

Deadline: 11. 10. 2017, 17:20 (před 2. cvičením)

Příklad 1 (3b)

Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

(a své tvrzení dokažte), kde $X \triangle Y = \{u | (u \in X \wedge u \notin Y) \vee (u \notin X \wedge u \in Y)\}$.

Příklad 2 (2b+1b)

Dokažte, že každé přirozené číslo n lze zapsat jako součet navzájem různých Fibonacciho čísel. Formálně: dokažte, že existují k, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ přirozená čísla taková, že:

(a)
$$2 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k,$$

(b)
$$n = \sum_{j}^{k} F_{i_j},$$

přičemž Fibonacciho posloupnost je definována rekurentně jako: $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 2$.

Jako bonus můžete navíc dokázat, že lze zvolit $i_1, i_2, \ldots$ tak, že $i_j - i_{j-1} > 1$ pro každé $j > 1$ a $j \leq k$.

Příklad 3 (4b)

Mějme šachovnici $2^n \times 2^n$, které chybí jedno políčko. Dokažte, že takovou děravou šachovnici lze pokrýt dlaždicemi tvaru L (které zabírají tři políčka) tak, že se dlaždice nepřekrývají, ani nevyčuhují ze šachovnice. *[Hint: vhodně si šachovnici rozdělte a použijte indukci.]*