1. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Neexistence důkazu není důkaz neexistence. Dokažte!

Užitečné informace

- **web:** ktiml.mff.cuni.cz/∼micka
- **mail:** micka@ktiml.mff.cuni.cz
- **sbírka úloh:** kam.mff.cuni.cz/∼sbirka
- informace budou na webu
- zápočet je za dostatek dobů z domácích úkolů (cca každé cviko) a písemek (dvě plus jedna opravná), alespoň 70 % z obého
- bonusové body za docházku (≤ 3 absence 10 b, 4 nebo 5 absencí 5b) a aktivitu
- jakýkoliv problém $\Rightarrow$ **ZEPTEJTE SE**

Příklad první — **Důkaz z definice/důkaz přímo**

Definujme relaci „a dělí b“ následovně: $a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = ka$.

Dokažte, že pokud $12|a$, pak $6|a$.

Příklad druhý — **Důkaz množinové rovnosti**

Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí $(A \cup C) \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Příklad třetí — **Důkaz protipříkladem**

Rozhodněte, zda platí: Nechť p, q jsou libovolná iracionální čísla, potom p^q je taktéž iracionální.

Příklad čtvrtý — **Důkaz sporem**

Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Příklad pátý — **Důkaz indukcí**

Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$: $4|(6n^2 + 2n)$

Příklad šestý — **Důkaz ekvivalence**

Dokažte (pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$)

$$2|a \Leftrightarrow 2 \nmid (a + 1)$$

Příklad sedmý

Dokažte pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$:

(a) n^2 je liché právě když n je liché
(b) $4 \nmid (n^2 + 2)$

Příklad osmý

Dokažte, že pro libovolné iracionální číslo p platí, že $2p$ je iracionální. Poté dokažte, že pro p iracionální a r racionální dokonce platí, že pr je racionální právě tehdy, když $r = 0$. *[Hint: Číslo r je racionální, pokud existují celá čísla a, b, tž. $r = a/b$.]*

Příklad devátý

Dokažte, nebo vyvraťe následující tvrzení ($\triangle$ značí *symetrický množinový rozdíl* – $X \triangle Y = \{u \in X \cup Y \mid (u \in X \wedge u \notin Y) \vee (u \notin X \wedge u \in Y)\}$):

(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(b) $A \cap (C \triangle B) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
(c) $A \cup (C \triangle B) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

Příklad desátý

Dokažte matematickou indukcí:

(a)

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

(c)

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1}$$

PŘÍKLAD JEDENÁCTÝ Dokažte pro každé n přirozené:

(a) $6|(n^3 + 5n)$
(b) $16|(9^{n+1} - 8n - 9)$

PŘÍKLAD DVANÁCTÝ Buď x reálné číslo takové, že $x+1/x$ je celé. Dokažte, že potom je i x^n+1/x^n celé pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. *[Hint: Použijte silnější verzi indukce, která předpokládá, že tvrzení platí pro k i $k-1$. Pozor na počátek indukce!]*

PŘÍKLAD TŘINÁCTÝ Dokažte, že pokud ke „standardní aritmetice“ (takové té, co znáte ze střední) přidáme fakt $1 + 1 = 3$, potom váš cvičící je děkanem této fakulty (ale ani muk před prof. Kratochvílem!).

PŘÍKLAD ČTRNÁCTÝ (Pro dávače) Vyřeště příklad z nadpisu.