# 2. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

A Cantor pravil: „Budiž TeMno!“. A ono bylo. Ale bylo sporné.

**Příklad první** Dokažte, nebo vyvraťe následující tvrzení ($\triangle$ značí *symetrický množinový rozdíl* – $X \triangle Y = \{u \in X \cup Y \,|\, (u \in X \wedge u \notin Y) \vee (u \notin X \wedge u \in Y)\}$), kde $A, B, C$ jsou libovolné množiny:

(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(b) $A \cap (C \triangle B) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
(c) $A \cup (C \triangle B) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

**Příklad druhý** Dokažte matematickou indukcí:

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

(b)
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1}$$

(c)
$$\forall n \in \mathbb{N} : 16 | (9^{n+1} - 8n - 9)$$

**Příklad třetí** Dokažte, že pro každé dvě množiny $X$ a $Y$ platí $2^X = 2^Y \Leftrightarrow X = Y$.

**Příklad čtvrtý** Dokažte, že pro konečné množiny $X$ a $Y$ platí:

(a) Existuje-li prosté zobrazení z $X$ do množiny $Y$, potom $|X| \leq |Y|$.
(b) Existuje-li zobrazení množiny $X$ na $Y$, potom $|X| \geq |Y|$.

*[Hint: použijte indukci podle velikosti jedné z množin]*

**Příklad pátý** Dokažte $\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 5) \Rightarrow (2^n > n^2)$.

**Příklad šestý** Buď $x$ reálné číslo takové, že $x+1/x$ je celé. Dokažte, že potom je i $x^n+1/x^n$ celé pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. *[Hint: Použijte silnější verzi indukce, která předpokládá, že tvrzení platí pro $k$ i $k-1$. Pozor na počátek indukce!]*

**Příklad sedmý** Ukažte, že pro zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině $X$ platí, že $f$ je prosté právě když $f$ je na. Platí totéž i pro nekonečné množiny $X$? *[Hint: Použijte předchozí příklad a spor]*

**Příklad osmý** Najděte:

(a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;
(b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$;
(c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)