4. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Ekvivalence. A možná přijde i uspořádání.

Příklad první Rozhodněte, zda jsou následující relace ekvivalence a pokud ano určete třídy ekvivalence:

(a) $R_1 \subseteq \mathbb{N}^2$, $xR_1y \Leftrightarrow p|(x-y)$ $(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$,
(b) $R_2 \subseteq (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$, $xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$,
(c) $R_3 \subseteq \mathbb{N}^2$, $xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$. Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

Příklad druhý Určete počet relací na čtyřech prvcích: (a) všech, (b) reflexivních, (c) symetrických, (d) antisymetrických.

Příklad třetí Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.

Příklad čtvrtý Ukažte, že relace $R \subseteq (R^2)^2$ taková, že $(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ je ekvivalence. Jak vypadají její třídy ekvivalence?

Příklad pátý Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

(a) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$: $(a,b) \leq_S (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$
(b) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$: $(a,b) \leq_U (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$
(c) Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z$: $(a,b) \leq_Z (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$
(d) Slovníkové (lexikografické) porovnání $\leq_L$: $(a,b) \leq_L (x,y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$
(e) Slovníkovo-maximové porovnání $\leq_M$: $(a,b) \leq_M (x,y) \Leftrightarrow \max(a,b) < \max(x,y) \vee (a,b) \leq_L (x,y)$
(f) Maximové porovnání s tím, že nerozhodné případy se porovnají lexikograficky $\leq_N$:

$$(a,b) \leq_N (x,y) \Leftrightarrow \max(a,b) < \max(x,y) \vee [\max(a,b) = \max(x,y) \wedge (a,b) \leq_L (x,y)]$$