5. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Příklad první Uvažme relaci “x je dělitelem čísla y” na množině $\{1, \ldots, n\}$.

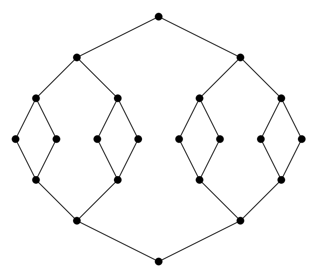
(a) Dokažte, že tato relace je (neostré) uspořádání.
(b) Nakreslete Hasseho diagram této relace pro $n = 10$.
(c) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?
(d) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

Příklad druhý Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

(a) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$: $(a, b) \leq_S (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$
(b) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$: $(a, b) \leq_U (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$
(c) Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z$: $(a, b) \leq_Z (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$
(d) Slovníkové (lexikografické) porovnání $\leq_L$: $(a, b) \leq_L (x, y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$
(e) Slovníkovo-maximové porovnání $\leq_M$: $(a, b) \leq_M (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) < \max(x, y) \vee (a, b) \leq_L (x, y)$
(f) Maximové porovnání s tím, že nerozhodné případy se porovnají lexikograficky $\leq_N$:

$$(a, b) \leq_N (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) < \max(x, y) \vee [\max(a, b) = \max(x, y) \wedge (a, b) \leq_L (x, y)]$$

Příklad třetí U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký maximální řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.



Příklad čtvrtý Na množině $\mathbb{N}$ nalezněte částečné uspořádání, které není lineární. A naopak nalezněte nějaké lineární uspořádání $\mathbb{N}$, které není „klasické“ uspořádání $\leq$.

Příklad pátý U následujících variant rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

(a) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.
(b) bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.
(c) bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.
(d) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.
(e) bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.

Příklad šestý Dokažte, že každé neprázdné konečné uspořádání má maximální prvek. Dále dokažte, že každé neprázdné konečné lineární uspořádání má dokonce největší prvek.

Příklad sedmý Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních: $(\{1, \ldots, n\}, |)$ a $(\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \subseteq)$.