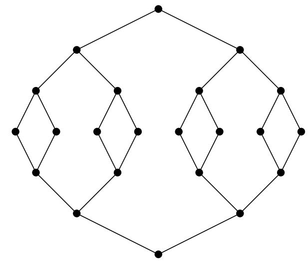
6. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY



Příklad první U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.

Příklad druhý Na množině $\mathbb{N}$ nalezněte částečné uspořádání, které není lineární. A naopak nalezněte nějaké lineární uspořádání $\mathbb{N}$, které není „klasické“ uspořádání $\leq$.

Příklad třetí U následujících variant rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

(a) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.
(b) bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.
(c) bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.
(d) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.
(e) bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.

Příklad čtvrtý Kolik je matic $n \times n$, jejichž položky jsou čísla z $\{1, 2, \ldots, q\}$?

Příklad pátý Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (tj. nestáli na sousedních políčkách.)

Příklad šestý Určete počet

(a) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
(b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Příklad sedmý Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

$$\text{(a)}\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \qquad \text{(b)}\ \binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

(c)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

(e)
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

(f)
$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$