

8. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Čím víc binomických koeficientů, tím víc kombinatorika!

PŘÍKLAD PRVNÍ Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

$$(a) \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad (b) \binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

[Hint: Indukce a binomická věta je kamarád, ne žrádlo.]

(c)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

(d)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

(e)

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

(f)

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Sečtěte: (a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ (b) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

(c)

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$$

[Hint: Kdyby v tom exponentu bylo $2k$, tak to zní skoro jako binomická věta, co? Kdyby jenom měla rovnice $x^{2k} = (-1)^k$ řešení...]

(d)

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

[Hint: Použijte stejný trik jako v předchozím příkladu, jen vezměte jinou část vzniklé řady.]

PŘÍKLAD TŘETÍ Z n předmětů vybíráme k . Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek (a chceme rozmístit všech k kuliček). Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je		
	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			