8. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Čím víc binomických koeficientů, tím víc kombinatorika!

Příklad první Kolik je matic $n \times n$, jejichž položky jsou čísla z $\{1, 2, \ldots, q\}$?

Příklad druhý Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (tj. nestáli na sousedních políčkách.)

Příklad třetí Určete počet

(a) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
(b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Příklad čtvrtý Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

$$\text{(a)}\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \qquad \text{(b)}\ \binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

[Hint: Indukce a binomická věta je kamarád, ne žrádlo.]

(c)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(d)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

(e)

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

(f)

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Příklad pátý Sečtěte: (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

(c)

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$$

[Hint: Kdyby v tom exponentu bylo $2k$, tak to zní skoro jako binomická věta, co? Kdyby jenom měla rovnice $x^{2k} = (-1)^k$ řešení...]

(d)

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

[Hint: Použijte stejný trik jako v předchozím příkladu, jen vezměte jinou část vzniklé řady.]