9. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Příklad první Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Příklad druhý Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek (a chceme rozmístit všech k kuliček). Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky	V každé přihrádce je		
jsou	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Příklad třetí Na výroční schůzi kombinatoriků se sešlo 7 čechů, 6 slováků a 5 maďarů a chtějí vytvořit kalendáře na příštích několik let. Kalendář bude na každý měsíc obsahovat jednu fotografii členů postavených do řady. Na kolik let mohou vytvořit kalendáře, pokud chtějí, aby žádné dvě fotky neobsahovaly stejnou řadu (i přes různé roky)? Na kolik let dokáží vytvořit kalendáře, pro širokou veřejnost, která nedokáže od sebe rozlišit osoby stejné národnosti?

Příklad čtvrtý Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Příklad pátý Dokažte následující rovnost (pro $n \in \mathbb{N}, k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, k_i \in \mathbb{N}$):

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \binom{n-1}{k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m} + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m} + \cdots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m - 1}.$$

Příklad šestý Matematik M žije na čtvercové síti o rozměrech 7×5. Každý den chodí ze svého domu v levém dolním rohu do své pracovny v pravém dolní rohu, přičemž každý den chce jít jinou cestou. Za jak dlouho se bude muset přestěhovat na jinou mřížku, když mu jeho OCD dovoluje chodit pouze po hranách mřížky, a to jen nahoru nebo doprava? (Dvě cesty se liší, pokud se liší alespoň v jednom bodě.)

Příklad sedmý Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit 0 až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-blacK) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládame-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín 3C+2Y+M+K je stejný jako 2C+Y+3K.)

Příklad osmý Kolika způsoby lze postavit vedle sebe n heretiků a m čarodejnic tak, že žádní dva heretici nejsou vedle sebe, když:

(a) $n = 5$, $m = 7$, stavíme je do řady, heretici jsou navzájem neroznetalní, čarodejnice taktéž.
(b) $n = 5$, $m = 7$, stavíme je do řady, heretici i čarodejnice jsou každý rozeznatelní.
(c) $n = 5$, $m = 7$, stavíme je do kruhu, heretici jsou navzájem neroznetalní, čarodejnice taktéž.
(d) $n = 5$, $m = 10$, stavíme je do kruhu, heretici jsou navzájem neroznetalní, čarodejnice taktéž.

Příklad devátý Mějme skupinu $n = 3k$ lidí a k stolků po třech. Kolikrát je třeba rozsadit tuto skupinu ke stolkům tak, aby se každá dvojice potkala právě jednou (za předpokladu, že to lze)? Lze toto provést pro sudý počet stolků? *[Hint: Podívejte se na jednoho konkrétního člověka]*