Datové struktury I

4. přednáška: Paměťová hierarchie

Jirka Fink

https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Zimní semestr 2024/25

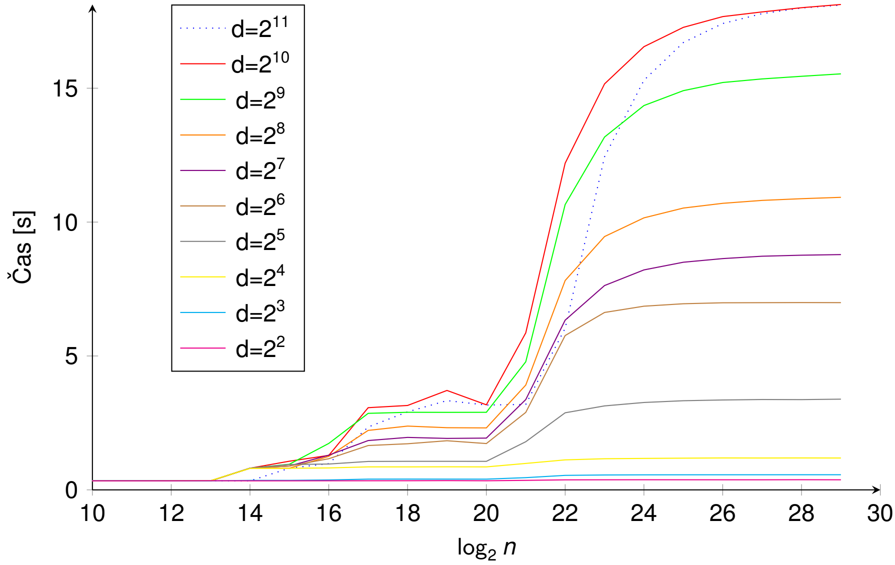
Příklad velikostí a rychlostí různých typů pamětí

	velikost	rychlost
L1 cache	32 KB	223 GB/s
L2 cache	256 KB	96 GB/s
L3 cache	8 MB	62 GB/s
RAM	32 GB	23 GB/s
SDD	112 GB	448 MB/s
HDD	2 TB	112 MB/s

Triviální program

```
# Inicializace pole 32-bitových čísel velikosti n
for (i=0; i+d<n; i+=d) do
    A[i] = i+d # Vezmeme každou d-tou pozici a vytvoříme cyklus
A[i]=0, i=0
# Měříme dobu průběhu cyklu v závislosti na parametrech n a d
# Počet operací je nezávislý na n a d
for (j=0; j< 2^28; j++) do
    i = A[i] # Dokola procházíme cyklus d-tých pozic
```

Pamětová hierarchie: Triviální program



Cache-oblivious (Frigo, Leiserson, Prokop, Ramachandran, 1999)

Zjednodušený model paměti

- Uvažujme pouze na dvě úrovně paměti: pomalý disk a rychlá cache
- Paměť je rozdělená na bloky (stránky) velikosti B ①
- Velikost cache je M, takže cache má $P = \frac{M}{B}$ bloků
- Procesor může přistupovat pouze k datům uložených v cache
- Paměť je plně asociativní ②
- Data se mezi diskem a cache přesouvají po celých blocích a cílem je určit počet bloků načtených do cache

Cache-aware algoritmus

Algoritmus zná hodnoty M a B a podle nich nastavuje parametry (např. velikost vrcholu B-stromu při ukládání dat na disk).

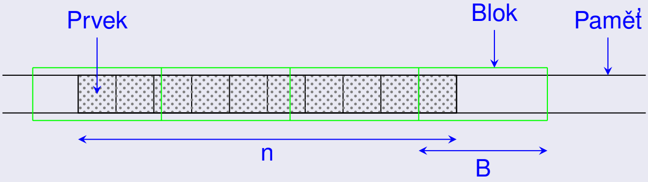
Cache-oblivious algoritmus

Algoritmus musí efektivně fungovat bez znalostí hodnot M a B. Důsledky:

- Není třeba nastavovat parametry programu, který je tak přenositelnější
- Algoritmus dobře funguje mezi libovolnými úrovněmi paměti (L1 – L2 – L3 – RAM)

1. Pro zjednodušení předpokládáme, že jeden prvek zabírá jednotkový prostor, takže do jednoho bloku se vejde *B* prvků.
2. Předpokládáme, že každý blok z disku může být uložený na libovolné pozici v cache. Tento předpoklad výrazně zjednodušuje analýzu, i když na reálných počítačích moc neplatí, viz `https://en.wikipedia.org/wiki/CPU_cache#Associativity`.

Přečtení souvislého pole (výpočet maxima, součtu a podobně)



- Minimální možný počet přenesených bloků je $\lceil n/B \rceil$
- Skutečný počet přenesených bloků je nejvýše $\lceil n/B \rceil + 1$
- Předpokládáme, že máme k dispozici $\mathcal{O}(1)$ registrů k uložení iterátoru a maxima

Obrácení pole

Počet přenesených bloků je stejný za předpokladu, že $P \geq 2$.

Reprezentace stromů

Binární vyvážený strom

- Jeden vrchol je uložen v nejvýše 2 blocích ①
- Výška stromu je $\mathcal{O}(\log n)$
- Na cestě z kořene do listu načteme $\mathcal{O}(\log n)$ bloků

(a,b)-strom

- Předpokládejme, že můžeme zvolit $b = \Theta(B)$
- Jeden vrchol je uložen v nejvýše 2 blocích a má $\Theta(B)$ synů
- Výška stromu je $\Theta(\log_B n)$
- Na cestě z kořene do listu načteme $\Theta(1 + \log_B n)$ bloků
- Toto je cache-aware přístup

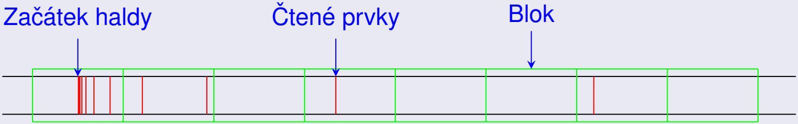
Reprezentace binárního stromu pomocí van Emde Boas

- Cache-oblivious reprezentace
- Na cestě z kořene do listu načteme $\Theta(1 + \log_B n)$ bloků
- Podrobnosti na Datových strukturách II

1. Předpokládáme, že prvky jsou dost malé, aby se vrchol vešel do jednoho bloku a druhý blok máme pro případ, že nemůžeme alokovat paměť tak, aby se paměť pro vrcholy byla zarovnána se začátky bloků.

Haldy

Binární halda v poli: Průchod od listu ke kořeni



- Cesta má $\Theta(\log n)$ vrcholů
- Posledních $\Theta(\log B)$ vrcholů leží v nejvýše dvou blocích
- Ostatní vrcholy jsou uloženy v po dvou různých blocích
- $\Theta(1 + \log n - \log B) = \Theta(1 + \log \frac{n}{B})$ přenesených bloků

B-regulární halda v poli: Průchod od listu ke kořeni

- Opět předpokládáme, že do jednoho bloku se vejde B prvků
- Cesta má $\Theta(1 + \log_B n)$ vrcholů
- Na cestě z kořene do listu načteme $\Theta(1 + \log_B n)$ bloků

Binární vyhledávání

- Uvažujeme neúspěšné vyhledávání, protože úspěšné může skončit dřív
- Porovnáváme $\Theta(\log n)$ prvků s hledaným prvkem
- Posledních $\Theta(\log B)$ prvků je uloženo v nejvýše dvou blocích
- Ostatní prvky jsou uloženy v po dvou různých blocích
- $\Theta(1 + \log \frac{n}{B})$ přenesených bloků

Mergesort

1. Slití polí velikosti n_1 a n_2 potřebuje $\frac{2}{B}(n_1 + n_2) + \mathcal{O}(1)$ přenosů
2. Uvažujme (binární) strom rekurzivního volání
3. Na jedné hladině stromu potřebujeme $\mathcal{O}(n/B + 1)$ přenosů
4. Počet hladin stromu je $\mathcal{O}(\log n)$
5. Celkový počet přenosů je $\mathcal{O}((n/B + 1)\log n)$

k-cestný mergesort

1. Slití polí velikostí $n_1, \dots, n_k$ potřebuje $\frac{2}{B}(n_1 + \cdots + n_k) + \mathcal{O}(1)$ přenosů
2. Musíme volit $k < P$
3. Uvažujme k-ární strom rekurzivního volání
4. Na jedné hladině stromu potřebujeme $\mathcal{O}(n/B + 1)$ přenosů
5. Počet hladin stromu je $\mathcal{O}(\log_k n)$
6. Celkový počet přenosů je $\mathcal{O}((n/B + 1)\log_k n)$
7. Volbou $k = \Theta(P)$ dostáváme $\mathcal{O}((n/B + 1)\log_P(n))$ přenosů ①

1. Tento algoritmus je cache-aware a tento počet přenosů je teoreticky optimální i v cache-oblivious modelu. Funnelsort je cache-oblivious algoritmus mající tento počet přenosů a časovou složitost $\mathcal{O}(n \log n)$

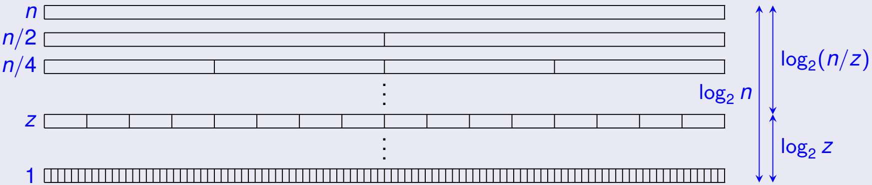
Mergesort

Případ $n \leq M/2$

Celé pole se vejde do cache, takže přenášíme $2n/B + \mathcal{O}(1)$ bloků. ①

Schéma

Délka spojovaných polí   Výška stromu rekurze



Případ $n > M/2$

1. Nechť z je maximální velikost pole, která může být setříděná v cache ②
2. Platí $z \leq \frac{M}{2} < 2z$
3. Slití jedné úrovně vyžaduje $2\frac{n}{B} + 2\frac{n}{z} + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}\left(\frac{n}{B}\right)$ přenosů. ③
4. Počet přenesených bloků je $\mathcal{O}\left(\frac{n}{B}\right)\left(1 + \log_2 \frac{n}{z}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{n}{B} \log \frac{n}{M}\right)$. ④

1. Polovina cache je použita na vstupní pole a druhá polovina na slité pole.
2. Pro jednoduchost předpokládáme, že velikosti polí v jedné úrovni rekurze jsou stejné. z odpovídá velikosti pole v úrovni rekurze takové, že dvě pole velikost $z/2$ mohou být slity v jedno pole velikost z.
3. Slití všech polí v jedné úrovni do polovičního počtu polí dvojnásobné délky vyžaduje přečtení všech prvků. Navíc je třeba uvažovat nezarovnání polí a bloků, takže hraniční bloky mohou patřit do dvou polí.
4. Funnelsort přenese $\mathcal{O}\left(\frac{n}{B}\log_P \frac{n}{B}\right)$ bloků.

Transpozice matic: Triviální přístup

Strategie pro výměnu stránek v cache

- OPT: Optimální off-line algoritmus předpokládající znalost všech přístupů do paměti
- FIFO: Z cache smažeme stránku, která je ze všech stránek v cachi nejdelší dobu
- LRU: Z cache smažeme stránku, která je ze všech stránek v cachi nejdéle nepoužitá

Triviální algoritmus pro transpozici matice A velikost $k \times k$

for $i \leftarrow 1$ **to** k **do**
  for $j \leftarrow i + 1$ **to** k **do**
    Swap(A_{ij}, A_{ji})

Předpoklady

Uvažujeme pouze případ

- $B < k$: Do jednoho bloku cache se nevejde celá řádka matice
- $P < k$: Do cache se nevejde celý sloupec matice

Transpozice matic: Triviální přístup

Příklad: Representace matice 5×5 v paměti

11	12	13	14	15	21	22	23	24	25	31	32	33	34	35	41	42	43	44	45	51	52	53	54	55

LRU a FIFO strategie

Při čtení matice po sloupcích si cache pamatuje posledních P řádků, takže při čtení prvku $A_{3,2}$ již prvek $A_{3,1}$ není v cache. Počet přenesených bloků je $\Omega(k^2)$.

OPT strategie

1. Transpozice prvního řádku/sloupce vyžaduje alespoň $k-1$ přenosů.
2. Nejvýše P prvků z druhého sloupce zůstane v cache.
3. Proto transpozice druhého řádku/sloupce vyžaduje alespoň $k-P-2$ přenosů.
4. Transpozice i-tého řádku/sloupce vyžaduje alespoň $\max\{0, k-P-i\}$ přenosů.
5. Celkový počet přenosu je alespoň $\sum_{i=1}^{k-P} k-P-i = \Omega\left((k-P)^2\right)$.

Transpozice matic: Cache-aware přístup

Cache-aware algoritmus pro transpozici matice A velikost $k \times k$

`# Rozdělíme danou matici na submatice velikosti` $z \times z$

for $(i = 0; i < k; i+= z)$ **do**
  for $(j = i; j < k; j+= z)$ **do**
    `# Transponujeme submatici začínající na pozici` (i, j)
    for $(ii = i; ii < min(k, i + z); ii + +)$ **do**
      for $(jj = max(j, ii + 1); jj < min(k, j + z); jj + +)$ **do**
        Swap$(A_{ii,jj}, A_{jj,ii})$

Analýza

- Zvolíme $z = B$ a předpokládáme, že $B \leq P$
- K transpozici jedné submatice potřebujeme $\mathcal{O}(z)$ přenosů
- Počet submatic je $\mathcal{O}\left((k/z)^2\right)$
- K transpozici potřebujeme $\mathcal{O}\left(k^2/B\right)$ přenosů, což je optimální
- Při správně zvolené hodnotě z bývá tento postup nejrychlejší

Idea

Rekurzivně rozdělíme na submatice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$

- Matice A_{11} a A_{22} se transponují podle stejného schématu
- Matice A_{12} a A_{21} se prohazují
- Transpozice a prohození matic A_{12} a A_{21} se provádí najednou

Transpozice matic: Rekurzivní transpozice

Procedure `transpose_on_diagonal` (A)
    if *Matice A je malá* **then**
        Transponujeme matici A triviálním postupem
    else
        $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \leftarrow$ souřadnice submatic
        `transpose_on_diagonal` (A_{11})
        `transpose_on_diagonal` (A_{22})
        `transpose_and_swap` (A_{12}, A_{21})

Procedure `transpose_and_swap` (A, B)
    if *Matice A a B jsou malé* **then**
        Prohodíme a transponujeme matice A a B triviálním postupem
    else
        $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} \leftarrow$ souřadnice submatic
        `transpose_and_swap` (A_{11}, B_{11})
        `transpose_and_swap` (A_{12}, B_{21})
        `transpose_and_swap` (A_{21}, B_{12})
        `transpose_and_swap` (A_{22}, B_{22})

- Všimněme si, že matice A a B musí mít posice symetrické podle hlavní diagonály původní matice, a proto ve skutečnosti funkci `transpose_and_swap()` stačí předávat pozice matici A.
- Ve funkci `transpose_on_diagonal` musí být matice A čtvercová a ležet na hlavní diagonále, a proto stačí předávat x-ovou souřadnici a řád matice.
- Funkci `transpose_on_diagonal` stačí předat dva argumenty i a m, aby má transponovat matici velikosti $m \times m$ začínající na pozici (i, i)
- Funkci `transpose_and_swap` stačí předat čtyři argumenty i, j, m, n, aby má transponovat a prohodit matici velikosti $m \times n$ začínající na pozici (i, j) s maticí velikosti $n \times m$ začínající na pozici (j, i)

Transpozice matic: Rekurzivní transpozice

Analýza počtu přenesených bloků

1. Předpoklad „Tall cache“: $M \geq 4B^2$, tj. počet bloků je alespoň $4B$ ①
2. Nechť z je maximální velikost submatice, ve které se jeden řádek vejde do jednoho bloku ②
3. Platí: $z \leq B \leq 2z$
4. Jedna submatice $z \times z$ je uložena v nejvýše $2z \leq 2B$ blocích
5. Dvě submatice $z \times z$ se vejdou do cache ③
6. Transpozice matice typu $z \times z$ vyžaduje nejvýše $4z$ přenosů
7. Máme $(k/z)^2$ submatic velikosti z
8. Celkový počet přenesených bloků je nejvýše $\frac{k^2}{z^2} \cdot 4z \leq \frac{8k^2}{B} = \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{B}\right)$
9. Tento postup je optimální až na multiplikativní faktor ④

1. Stačilo by předpokládat, že počet bloků je alespoň $\Omega(B)$. Máme-li alespoň $4B$ bloků, pak je postup algebraicky jednodušší.
2. Pokud začátek řádky není na začátku bloku, tak je jeden řádek submatice uložen ve dvou blocích.
3. Funkce `transpose_and_swap` pracujeme se dvěma submaticemi.
4. Celá matice je uložena v alespoň $\frac{k^2}{B}$ blocích paměti.