Datové struktury I

7. přednáška: Separované řetězce z k-nezávislé hešovací systémy

Jirka Fink

https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Zimní semestr 2024/25

Základní pojmy

- Značení: $[n] = \{0, \dots, n-1\}$
- Máme univerzum U všech prvků
- Chceme uložit podmnožinu $S \subseteq U$ velikosti n
- Uložíme S do pole velikosti m pomocí hešovací funkce $h : U \to M$, kde $M = [m]$
- Hešovacím systémem $\mathcal{H}$ rozumíme libovolnou množinu hešovacích funkcí
- Dva prvky $x, y \in S$ kolidují, jestliže $h(x) = h(y)$
- Uvažujeme universum $U = [u]$ pro libovolné $u \in \mathbb{N}$, pokud není uvedeno jinak

c-universální hešovací systém

c-universální systém (ekvivalentní definice)

Systém hešovacích funkcí $\mathcal{H}$ je c-universální, jestliže pro všechna různá $x, y \in U$ ①

- počet hešovacích funkcí $h \in \mathcal{H}$ splňujících $h(x) = h(y)$ je nejvýše $\frac{c|\mathcal{H}|}{m}$
- náhodně zvolená $h \in \mathcal{H}$ splňuje $P[h(x) = h(y)] \leq \frac{c}{m}$ ② ③

(k, c)-nezávislý systém hešovacích funkcí

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $K = \{1, \dots, k\}$ a $c \geq 1$.
Systém hešovacích funkcí $\mathcal{H}$ je (k, c)-nezávislý, pokud náhodně zvolená $h \in \mathcal{H}$ splňuje

$$P[h(x_i) = z_i \, \forall i \in K] \leq \frac{c}{m^k}$$

pro všechna po dvou různá $x_1, \dots, x_k \in U$ a všechna $z_1, \dots, z_k \in M$.

k-nezávislý systém hešovacích funkcí

- Systém $\mathcal{H}$ je k-nezávislý, pokud je (k, c)-nezávislý pro nějaké $c \geq 1$.
- Systém $\mathcal{H}$ je silně k-nezávislý, pokud je $(k, 1)$-nezávislý.

1. Navíc obvykle vyžadujeme, aby hešovací funkci šlo spočítat v čase $\mathcal{O}(1)$ a aby funkci bylo možné popsat $\mathcal{O}(1)$ parametry.
2. Náhodný výběr hešovací funkce má vždy rovnoměrné rozdělení na celém systému.
3. Úplně náhodný hešovací systém je 1-universální, protože $h(x)$ padne do nějaké přihrádky a $h(y)$ má uniformní distribuci nezávislou na $h(x)$, a proto $P[h(x) = h(y)] = \frac{1}{m}$.

Hešování se separovanými řetězci

Popis

V přihrádce j jsou uloženy všechny prvky $i \in S$ splňující $h(i) = j$.

Implementace

- std::unordered_map v C++
- Dictionary v C#
- HashMap v Java
- Dictionary v Python

Otázka

Je možné zajistit složitost operací FIND, INSERT a DELETE $\mathcal{O}(\log n)$ v nejhorším případě? ①

Platí následující tvrzení?

Jestliže $m = \Theta(n)$ a pro hešovací systém platí, že očekávaný počet prvků v libovolné přihrádce je $\mathcal{O}(1)$, pak očekávaná složitost operací FIND, INSERT a DELETE je $\mathcal{O}(1)$. ②

1. Pro každou přihrádku vytvoříme vyhledávací strom.
2. Pro systém $\mathcal{H} = \{h_a(i) = j; j \in M\}$ a přihrádku $j \in M$ z linearity střední hodnoty platí $E[\{i \in S : h(i) = j\}] = \sum_{i \in S} P[h(i) = j] = \frac{n}{m} = \Theta(1)$, ale všechny prvky jsou ve stejné přihrádce, takže složitost operací je lineární.

Hešování se separovanými řetězci: Složitost

Pozorování

Jestliže $\mathcal{H}$ je c-universální, pak očekávaný počet prvků v přihrádce $h(x)$ pro $x \in U$ je nejvýše $\frac{cn}{m}$.

Důkaz

$E[|\{y \in S : h(x) = h(y)\}|] = \sum_{y \in S} P[h(x) = h(y)] \leq \frac{cn}{m}$

Důsledek

Jestliže $\mathcal{H}$ je c-universální a $m = \Omega(n)$, pak očekávaná složitost operací FIND, INSERT a DELETE je $\mathcal{O}(1)$.

Dynamická velikost tabulky, pokud dopředu neznáme počet prvků

- Tabulku udržujeme ve velikosti $n/4 \leq m \leq n$
- Při překročení mezí tabulku dvakrát zmenšíme/zvětšíme přehešováním všech prvků novou hešovací funkcí
- Amortizovaná očekávaná složitost operací INSERT a DELETE je $\mathcal{O}(1)$

Hešování se separovanými řetězci: Nejdelší řetězec

Definice

Posloupnost náhodných jevů $E_n, n \in \mathbb{N}$ se vyskytuje s velkou pravděpodobností, pokud existují $c > 1$ a $n_0 \in N$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $P[E_n] \geq 1 - \frac{1}{n^c}$.

Značení

Nechť A_j je počet prvků v j-té přihrádce.

Věta: Délka nejdelšího řetězce

Pokud $m = \Theta(n)$ a systém hešovacích funkcí je úplně náhodný, pak délka nejdelšího řetězce $\max_{j \in M} A_j = \Theta(\frac{\log n}{\log \log n})$ s velkou pravděpodobností.

Poznámka

Dokážeme, že $P[\max_j A_j \leq (1+\epsilon)\frac{\log n}{\log \log n}] > 1 - \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{3}}}$ pro všechna $\epsilon > 0$. ①

Důsledek: Očekávaná délka nejdelšího řetězce

Pokud $\alpha = \Theta(1)$ a systém hešovacích funkcí je úplně náhodný, pak očekávaná délka nejdelšího řetězce je $E[\max_{j \in M} A_j] = \Theta(\frac{\log n}{\log \log n})$. ②

1. Nebudeme dokazovat, že $\max_{j \in M} A_j = \Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$ s velkou pravděpodobností.
2. Pro $\epsilon = 3$ dostáváme $P[\max_j A_j \leq 4\frac{\log n}{\log \log n}] > 1 - \frac{1}{n}$. Tedy $E[\max_{j \in M} A_j] \leq P[\max_j A_j \leq 4\frac{\log n}{\log \log n}] \cdot 4\frac{\log n}{\log \log n} + P[\max_j A_j > 4\frac{\log n}{\log \log n}] \cdot n \leq 4\frac{\log n}{\log \log n} + 1$.
Důkaz $E[\max_{j \in M} A_j] = \Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$ vynecháváme.

Hešování se separovanými řetězci: Nejdelší řetězec

Chernoffův odhad

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné proměnné mající hodnoty $\{0, 1\}$. Označme $X = \sum_{i=1}^n X_i$ a $\mu = E[X]$. Pak pro každé $c > 1$ platí

$$P[X > c\mu] < \frac{e^{(c-1)\mu}}{c^{c\mu}}.$$

Důkaz: $P[\max_j A_j \le (1+\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}] > 1 - \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{3}}}$

1. I_{ij} je náhodná proměnná indikující, zda i-tý prvek patří do j-té přihrádky
2. Platí $A_j = \sum_{i \in S} I_{ij}$
3. Mějme $\epsilon > 0$
4. Označme $\mu = E[A_1] = n/m$
5. Dále $c = (1+\epsilon)\frac{\log n}{\mu \log\log n}$
6. Platí $P[\max_j A_j > c\mu] = P[\exists j : A_j > c\mu] \le \sum_j P[A_j > c\mu] = mP[A_1 > c\mu]$
7. Aplikujeme Chernoffův odhad na proměnné I_{i1} pro $i \in S$
8. Platí $P[\max_j A_j > c\mu] \le mP[A_1 > c\mu] < m\frac{e^{(c-1)\mu}}{c^{c\mu}} = me^{-\mu}e^{c\mu - c\mu\log c}$

Hešování se separovanými řetězci: Nejdelší řetězec

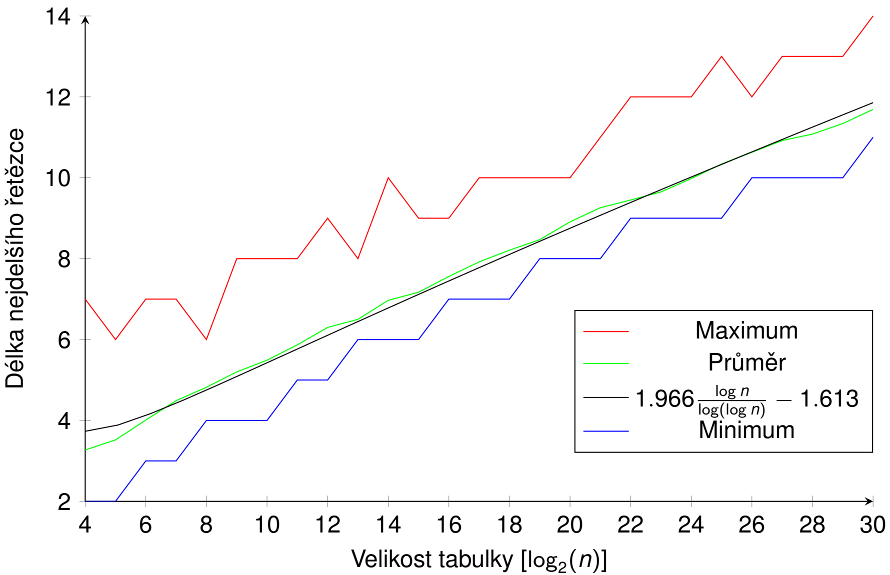
Důkaz: $P[\max_j A_j \leq (1+\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}] > 1 - \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{3}}}$

- Označili jsme $c = (1+\epsilon)\frac{\log n}{\mu \log\log n}$ a odvozujeme

$$
\begin{aligned}
P[\max_j A_j > c\mu] &< me^{-\mu} e^{c\mu - c\mu\log c} \\
&= me^{-\mu} e^{(1+\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n} - (1+\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}\log\left(\frac{(1+\epsilon)\log n}{\mu\log\log n}\right)} \\
&= me^{-\mu} n^{\frac{1+\epsilon}{\log\log n} - \frac{1+\epsilon}{\log\log n}\log\left(\frac{(1+\epsilon)\log n}{\mu\log\log n}\right)} \\
&= me^{-\mu} n^{\frac{1+\epsilon}{\log\log n} - (1+\epsilon) + \frac{1+\epsilon}{\log\log n}\log\left(\frac{\mu}{1+\epsilon}\log\log n\right)} \\
&= \frac{m}{n^{1+\frac{\epsilon}{2}}} e^{-\mu} n^{-\frac{\epsilon}{2} + \frac{1+\epsilon}{\log\log n} + (1+\epsilon)\frac{\log\left(\frac{\mu}{1+\epsilon}\log\log n\right)}{\log\log n}} \\
&< \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{2}}} \frac{me^{-\mu}}{n} n^0 < \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{3}}} \qquad \text{. . . pro dostatečně velká } n
\end{aligned}
$$

Protože $-\frac{\epsilon}{2} + \frac{1+\epsilon}{\log\log n} + (1+\epsilon)\frac{\log\left(\frac{\mu}{1+\epsilon}\log\log n\right)}{\log\log n} < 0$ pro dostatečně velká n.

- Tedy $P[\max_j A_j \leq (1+\epsilon)\frac{\log n}{\log\log n}] > 1 - \frac{1}{n^{\frac{\epsilon}{3}}}$.


14
12
10
8
6
4
2
Délka nejdelšího řetězce
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
Velikost tabulky [$\log_2(n)$]
Maximum
Průměr
$1.966\frac{\log n}{\log(\log n)} - 1.613$
Minimum

1. Hodíme n míčů do n košů. Kolik míčů je v nejplnějším koši v závislosti na n? Pro každé n provádíme 100 experimentů, ze kterých se díváme na minimum, maximum a průměr. Interpolace funkcí $1.966\frac{\log n}{\log(\log n)} - 1.613$ má chybu (součet čtverců rozdílu) 0.682 a pro funkci $0.466\log n + 2.254$ je chyba 0.68, takže na ověření správnosti odhadu $\frac{\log n}{\log(\log n)}$ bychom potřebovali zkoušet větší hodnoty n, ale na to už nemáme dost paměti.

Více-přihrádkové hešování se separovanými řetězci

2-přihrádkové hešování

Prvek x může být uložen v přihrádce $h_1(x)$ nebo $h_2(x)$ a nový prvek vkládáme do přihrádky s menším počtem prvků, kde h_1 a h_2 jsou dvě hešovací funkce.

2-přihrádkové hešování: Délka nejdelšího řetězce (bez důkazu)

Očekávaná délka nejdelšího řetězce je $\mathcal{O}(\log \log n)$.

k-přihrádkové hešování

Prvek x může být uložen v přihrádkách $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ a nový prvek vkládáme do přihrádky s menším počtem prvků, kde $h_1, \ldots, h_k$ jsou hešovací funkce.

k-přihrádkové hešování: Délka nejdelšího řetězce (bez důkazu)

Očekávaná délka nejdelšího řetězce je $\mathcal{O}\left(\frac{\log \log n}{\log k}\right)$.

Skládání modulo m

Lemma

- Nechť systém $\mathcal{H}$ je $(2, c)$-nezávislý z U do $[r]$ a $m \leq r$
- Pak $\mathcal{H} \bmod m = \{x \to h(x) \bmod m;\ h \in \mathcal{H}\}$ je $2c$-universální a $(2, 4c)$-nezávislý

Lemma

- Nechť systém $\mathcal{H}$ je (k, c)-nezávislý z U do $[r]$ a $r \geq 2km$
- Pak $\mathcal{H} \bmod m = \{x \to h(x) \bmod m;\ h \in \mathcal{H}\}$ je $(k, 2c)$-nezávislý

Důkaz

- Zvolme různá $x_1, \dots, x_k \in U$, $z_1, \dots, z_k \in M$ a označme $y_i = h(x_i)$
- $P[h(x_i) \bmod m = z_i\ \forall i \in K] = \sum P[y_i \equiv_m z_i\ \forall i \in K]$
- Sumu sčítáme přes nejvýše $\lceil \frac{r}{m} \rceil \leq \frac{r+m-1}{m}$ hodnot $y_1, \dots, y_k$
- Z odhadu $1 + x \leq e^x$ plyne
  $P[h(x_i) \bmod m = z_i\ \forall i \in K] \leq \frac{c}{r^k} \cdot \left(\frac{r+m-1}{m}\right)^k = \frac{c}{m^k} \cdot \left(\frac{r+m-1}{r}\right)^k \leq$
  $\frac{c}{m^k} \cdot \left(1 + \frac{m}{r}\right)^k = \frac{c}{m^k} \cdot e^{km/r} \leq \frac{c}{m^k} \cdot e^{1/2} \leq \frac{2c}{m^k}$

Poly-mod-prime

Lemma

- Nechť systém $\mathcal{H}$ je (k,c)-nezávislý z U do $[r]$ a $r \geq 2km$
- Pak $\mathcal{H} \mod m = \{x \to h(x) \mod m;\ h \in \mathcal{H}\}$ je $(k, 2c)$-nezávislý

Věta z algebry: Jednoznačnost interpolace polynomem

Pro každé těleso T, $k > 1$ celočíselné, po dvou různá $x_1, \dots, x_k \in T$ a $y_1, \dots, y_k \in T$ existuje právě jeden polynom $p_a(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$ stupně $k-1$ s koeficienty $a_0, \dots, a_{k-1} \in T$ takový, že $p(x_i) = y_i$ pro všechna $i \in K$.

Pozorování: Systém Poly-mod-prime

- Nechť p je prvočíslo, $a \in \mathbb{Z}_p^k$, $x \in \mathbb{Z}_p$
- $h_a(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$
- Systém $P_k = \left\{h_a;\ a \in \mathbb{Z}_p^k\right\}$ je $(k, 1)$-nezávislý ①
- Systém $P_k \mod m$ je $(k, 2)$-nezávislý pro $p \geq 2km$ ②

1. Důkaz přímo plyne z jednoznačnosti polynomu
2. Jestliže p je prvočíslo, tak hešovací funkci lze zapsat jako $h_a(x) = (\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \mod p) \mod m$, kde aritmetické operace jsou nad celými čísly.

Multiply-shift

Multiply-shift

- Předpokládáme, že $|U| = 2^w$ a $m = 2^l$
- $h_a(x) = (ax \bmod 2^w) >> (w - l)$
- $\mathcal{H} = \{h_a;\ a \text{ je liché } w\text{-bitové číslo } \}$

Implementace v C

```
uint64_t hash(uint64_t x, uint64_t l, uint64_t a)
{ return (a*x) >> (64-l); }
```

Vlastnosti systému multiply-shift

- 2-universální
- Velmi rychlý na reálných počítačích
- V praxi často používaný
- Celý výpočet musí být proveden v neznaménkových celočíselných typech, protože ze součinu *ax* potřebujeme získat posledních *w* bitů

Tabulkové hešování

Tabulkové hešování

- $\oplus$ značí bitový XOR
- Předpokládáme, že $u = 2^w$ a $m = 2^l$ a w je násobek $d \geq 2$
- Bitový zápis čísla $x \in U$ rozdělíme na d částí $x^1, \dots, x^d$ po $\frac{w}{d}$ bitech
- Pro každé $i = 1, \dots, d$ vybereme náhodnou hešovací funkci $T_i : [2^{w/d}] \to M$
- Hešovací funkce je $h(x) = T_1(x^1) \oplus \cdots \oplus T_d(x^d)$
- K vygenerování h potřebujeme $d \cdot 2^{w/d}$ náhodných čísel z rozsahu $M = [2^l]$

Ilustrativní příklad

- Uvažujme $w = 12$ a $d = 3$
- Nejprve vygeneruje náhodné funkce $T_1, T_2, T_3 : [2^4] \to M$
- Číslo $x = 101100111001$ rozdělíme na $x^1 = 1011$, $x^2 = 0011$ a $x^3 = 1001$
- Výpočet hešovací funkce je
  $h(x) = T_1(x^1) \oplus T_2(x^2) \oplus T_3(x^3) = T_1(1011) \oplus T_2(0011) \oplus T_3(1001)$

Univerzalita

Tabulkové hešování je silně 3-nezávislé, ale není 4-nezávislé.

Tabulkové hešování

Tabulkové hešování

- Předpokládáme, že $u = 2^w$ a $m = 2^l$ a w je násobek d
- Bitový zápis čísla $x \in U$ rozdělíme na d částí $x^1, \dots, x^d$ po $\frac{w}{d}$ bitech
- Pro každé $i = 1, \dots, d$ vybereme náhodnou hešovací funkci $T_i : [2^{w/d}] \to M$
- Hešovací funkce je $h(x) = T_1(x^1) \oplus \cdots \oplus T_d(x^d)$

Univerzalita

Tabulkové hešování je 3-nezávislé, ale není 4-nezávislé.

Důkaz 2-nezávislosti (3-nezávislost je ponechána na cvičení)

- Mějme dva prvky x_1 a x_2 lišící se v i-tých částech
- Nechť $h_i(x) = T_1(x^1) \oplus \cdots \oplus T_{i-1}(x^{i-1}) \oplus T_{i+1}(x^{i+1}) \oplus \cdots \oplus T_d(x^d)$
- $P[h(x_1) = z_1] = P[h_i(x_1) \oplus T_i(x_1^i) = z_1] = P[T_i(x_1^i) = z_1 \oplus h_i(x_1)] = \frac{1}{m}$ 1
- Náhodné jevy $h(x_1) = z_1$ a $h(x_2) = z_2$ jsou nezávislé
  - Náhodné proměnné $T_i(x_1^i)$ a $T_i(x_2^i)$ jsou nezávislé
  - Náhodné jevy $T_i(x_1^i) = z_1 \oplus h_i(x_1)$ a $T_i(x_2^i) = z_2 \oplus h_i(x_2)$ jsou nezávislé
- $P[h(x_1) = z_1 \text{ a } h(x_2) = z_2] = P[h(x_1) = z_1]P[h(x_2) = z_2] = \frac{1}{m^2}$

1. $T_i(x_1^i)$ nabývá všech hodnot z M se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{m}$ a náhodné proměnné $T_i(x_1^i)$ a $z_1 \oplus h_i(x_1)$ jsou nezávislé.

Tabulkové hešování není 4-nezávislé

1. Zvolíme prvky x_1, x_2, x_3 a x_4 takové, že
   - části x_1 splňují $x_1^1 = 0$, $x_1^2 = 0$, $x_1^i = 0$ pro $i \geq 3$
   - části x_2 splňují $x_2^1 = 1$, $x_2^2 = 0$, $x_2^i = 0$ pro $i \geq 3$
   - části x_3 splňují $x_3^1 = 0$, $x_3^2 = 1$, $x_3^i = 0$ pro $i \geq 3$
   - části x_4 splňují $x_4^1 = 1$, $x_4^2 = 1$, $x_4^i = 0$ pro $i \geq 3$
2. Platí $h(x_1) \oplus h(x_2) \oplus h(x_3) = h(x_4)$
3. Zvolme libovolná z_1, z_2, z_3 a nechť $z_4 = z_1 \oplus z_2 \oplus z_3$
4. Jestliže $h(x_1) = z_1$, $h(x_2) = z_2$ a $h(x_3) = z_3$, pak platí $h(x_4) = z_4$
5. $P[h(x_1) = z_1 \text{ a } h(x_2) = z_2 \text{ a } h(x_3) = z_3 \text{ a } h(x_4) = z_4] = \frac{1}{m^3} > \frac{c}{m^4}$

Scalar-mod-prime

- Chceme hešovat d-tici $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo
- $\left\{x_1, \dots, x_d \to \sum_{i=1}^d a_i x_i \mod p;\ a \in \mathbb{Z}_p^d\right\}$ je 1-universální
- $\left\{x_1, \dots, x_d \to b + \sum_{i=1}^d a_i x_i \mod p;\ a \in \mathbb{Z}_p^d, b \in \mathbb{Z}_p\right\}$ je (2,1)-nezávislý
- $\left\{x_1, \dots, x_d \to \left(b + \sum_{i=1}^d a_i x_i \mod p\right) \mod m;\ a \in \mathbb{Z}_p^d, b \in \mathbb{Z}_p\right\}$ je (2,4)-nezávislý

Důkaz 1-universálnosti ①

- Mějme různé $x, y \in \mathbb{Z}_p^d$ a BÚNO předpokládejme, že $x_1 \neq y_1$
- $P[a \cdot x \equiv_p a \cdot y] = P[a \cdot (x - y) \equiv_p 0] = P\left[a_1 \equiv_p \frac{\sum_{i=2}^d a_i(y_i - x_i)}{x_1 - y_1}\right] = 1/p$ ②

1. Pro 2-nezávislost stačí podobně nahlednout, že a_1, b jsou jednoznačně určené.
2. Náhodná proměnná a_1 musí nabývat jednu konkrétní hodnotu, což nastane s pravděpodobností $1/p$.

Poly-mod-prime pro různě dlouhé řetězce I

- Chceme hešovat řetězec $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo
- $\left\{x_1, \dots, x_d \to \sum_{i=0}^{d-1} x_{i+1} a^i \mod p;\ a \in [p]\right\}$ je d-universální
- Dva různé polynomy stupně nejvýše $d-1$ mají nejvýše d společných bodů, takže existuje nejvýše d kolidujících hodnot a.

Poly-mod-prime pro různě dlouhé řetězce II

- Chceme hešovat řetězec $x_1, \dots, x_d \in U$ do M, kde $p \geq m$ je prvočíslo
- $h_{a,b,c}(x_1, \dots, x_d) = \left(b + c \sum_{i=0}^{d-1} x_{i+1} a^i \mod p\right) \mod m$
- $\mathcal{H} = \{h_{a,b,c};\ a, b, c \in [p]\}$
- $P[h_{a,b,c}(x_1, \dots, x_d) = h_{a,b,c}(x'_1, \dots, x'_{d'})] \leq \frac{2}{m}$ pro různé řetězce délek $d, d' \leq \frac{p}{m}$.