Cvičení z Algoritmizace a Programování 1

2. cvičení

Řešení DÚ

Je dané číslo v posloupnosti?

- Dáno číslo x a dále posloupnost N čísel $y_1, y_2 \ldots y_N$.
- Je nějaké z čísel $y_1, y_2 \ldots y_N$ rovno x?

- Zápis algoritmu
- Správnost
- Složitost

„O“ notace

- K čemu je to dobré?
- Připomenutí definic:
- Nechť $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- $f \in O(g) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 :$
  $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$
- $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 :$
  $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$
- $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f(n) \in O\big(g(n)\big) \wedge f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$

Dokažte nebo vyvraťte: $n^2 = O(n^3)$

- Myslíme si, že platí. Jak to dokážeme?

- Z definice:
  - $n^2 = O(n^3) \iff \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$
- Je to tvrzení typu „Existuje … takové, že platí …“
- Tudíž jej dokážeme tak, že najdeme konkrétní c a n_0 splňující:
$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$$
- Pro $n \geq 0$ je $n^2 \leq c \cdot n^3$ právě tehdy, když $1 \leq c \cdot n$ (krácení)
  - $0 \leq n^2$ platí pro každé n
- Tudíž například pro $c = 1$ a $n_0 = 1$ tvrzení platí.
- Ukázali jsme, že tvrzení $\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$ platí, a proto $n^2 = O(n^3)$.

Dokažte nebo vyvraťte: $n^3 = O(n^2)$

- Myslíme si, že neplatí. Jak to dokážeme?
- Dokážeme, že $n^3 \neq O(n^2)$.
- Z definice (negace definice):
  - $n^3 \neq O(n^2) \Leftrightarrow \neg\,(\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 :\ 0 \leq n^3 \leq c \cdot n^2)$
    $\Leftrightarrow \quad \forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 :\ (0 > n^3) \vee (n^3 > c \cdot n^2)$
- Potřebujeme tedy dokázat:
  - $\forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 :\ (n^3 > c \cdot n^2)$
- Je to tvrzení typu „Pro každé … platí …“
- Dokážeme „hrou s protivníkem“:
  - Protivník nám dá nějaké c a n_0, my dokážeme, že i pro tyto hodnoty tvrzení platí.
- Mějme tedy c a n_0. Potřebujeme k nim najít $n \geq n_0$ takové, že $n^3 > c \cdot n^2$.
- Pro $n > 0$ platí $n^3 > c \cdot n^2$ právě tehdy, když $n > c$.
- Tudíž, pro daná c a n_0 můžeme použít například $n = \max(n_0, c) + 1$.
- K daným (libovolným) c a n_0 umíme najít n splňující $(n^3 > c \cdot n^2)$.
- Tím jsme dokázali tvrzení $\forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 :\ (n^3 > c \cdot n^2)$ a tedy, že $n^3 \neq O(n^2)$.

Rozhodněte tvrzení

Pro každou dvojici funkcí $f, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ platí

a) pokud $f = O(g)$, potom $g = \Omega(f)$

b) pokud $f = O(g)$, potom $2^{f(n)} = O\left(2^{g(n)}\right)$

c) $f = O(g)$ nebo $g = O(f)$

d) $f = O(f^2)$ ... *přičemž* $f^2(n) = \left(f(n)\right)^2$

Domácí úkol

- Viz ReCodEx