

Cvičení z Algoritmizace a Programování 1

2. cvičení

Řešení DÚ

Je dané číslo v posloupnosti?

- Dáno číslo x a dále posloupnost N čísel $y_1, y_2 \dots y_N$.
- Je nějaké z čísel $y_1, y_2 \dots y_N$ rovno x ?

- Zápis algoritmu
- Správnost
- Složitost

„O“ notace

- K čemu je to dobré?
- Připomenutí definic:
- Necht' $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(n) \in O(g(n)) \iff \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n)) \iff f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$

Dokažte nebo vyvráťte: $n^2 = O(n^3)$

- Myslíme si, že platí. Jak to dokážeme?
- Z definice:
 - $n^2 = O(n^3) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$
- Je to tvrzení typu „Existuje ... takové, že platí ...“
- Tudíž jej dokážeme tak, že najdeme konkrétní c a n_0 splňující:
$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$$
- Pro $n \geq 0$ je $n^2 \leq c \cdot n^3$ právě tehdy, když $1 \leq c \cdot n$ (krácení)
 - $0 \leq n^2$ platí pro každé n
- Tudíž například pro $c = 1$ a $n_0 = 1$ tvrzení platí.
- Ukázali jsme, že tvrzení $\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$ platí, a proto $n^2 = O(n^3)$.

Dokažte nebo vyvráťte: $n^3 = O(n^2)$

- Myslíme si, že neplatí. Jak to dokážeme?
- Dokážeme, že $n^3 \neq O(n^2)$.
- Z definice (negace definice):
 - $n^3 \neq O(n^2) \Leftrightarrow \neg (\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^3 \leq c \cdot n^2)$
 $\Leftrightarrow \forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 : (0 > n^3) \vee (n^3 > c \cdot n^2)$
- Potřebujeme tedy dokázat:
 - $\forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 : (n^3 > c \cdot n^2)$
- Je to tvrzení typu „Pro každé ... platí ...“
- Dokážeme „hrou s protivníkem“:
 - Protivník nám dá nějaké c a n_0 , my dokážeme, že i pro tyto hodnoty tvrzení platí.
- Mějme tedy c a n_0 . Potřebujeme k nim najít $n \geq n_0$ takové, že $n^3 > c \cdot n^2$.
- Pro $n > 0$ platí $n^3 > c \cdot n^2$ právě tehdy, když $n > c$.
- Tudíž, pro daná c a n_0 můžeme použít například $n = \max(n_0, c) + 1$.
- K daným (libovolným) c a n_0 umíme najít n splňující $(n^3 > c \cdot n^2)$.
- Tím jsme dokázali tvrzení $\forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 : (n^3 > c \cdot n^2)$ a tedy, že $n^3 \neq O(n^2)$.

Rozhodněte tvrzení

Pro každou dvojici funkcí $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ platí

- pokud $f(n) = O(g(n))$, potom $g(n) = \Omega(f(n))$
- pokud $f(n) = O(g(n))$, potom $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
- $f(n) = O(g(n))$ nebo $g(n) = O(f(n))$
- $f(n) = O(f(n)^2)$

Programování

- Nainstalovat Python - <https://www.python.org/downloads/>
- Nainstalovat IDE – já budu používat <https://code.visualstudio.com/download>
- Ve VSCode přidat rozšíření (extension) pro Python

Domácí úkol

- Viz ReCodEx