Cvičení z Algoritmizace a Programování 1

3. cvičení

Algoritmizace

Kuličky

- Máme 3 kuličky, žádné dvě nejsou stejně těžké.
- Máte k dispozici máte rovnoramenné váhy.
- Pomocí co nejmenšího počtu vážení:

a) určete, která z nich je nejlehčí,

b) určete, která z nich je „prostřední“.

Domácí úkol – Prostřední z pěti

- Viz ReCodEx – Algoritmizace https://recodex.mff.cuni.cz/app/assignment/0e978f20-6e0d-4432-a68b-733224956357
- Co se po Vás chce:
  - Popište algoritmus, který najde prostřední z pěti na co nejmenší počet vážení (v nejhorším případě).
  - Hodnotí se potřebný počet vážení a srozumitelnost popisu algoritmu (a samozřejmě zda algoritmus vůbec funguje)

- Do 27. 10., 8:00
- Odevzdávejte do ReCodExu
- Kdyby se vám to nešlo (limit na velikost, …) pošlete mi řešení e-mailem

- Nápověda: zkuste nejdříve vyřešit úlohu „Najděte druhý nejlehčí ze čtyř" – na 4 vážení

„O“ notace

- Připomenutí definic:
- $\mathrm{f}(n) \in \mathrm{O}\big(\mathrm{g}(n)\big) \Leftrightarrow$
$$\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 :$$
$$0 \leq \mathrm{f}(n) \leq c \cdot \mathrm{g}(n)$$
- $\mathrm{f}(n) \in \Omega\big(\mathrm{g}(n)\big) \Leftrightarrow$
$$\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 :$$
$$0 \leq c \cdot \mathrm{g}(n) \leq \mathrm{f}(n)$$
- $\mathrm{f}(n) \in \Theta\big(\mathrm{g}(n)\big) \Leftrightarrow$
$$\mathrm{f}(n) \in \mathrm{O}\big(\mathrm{g}(n)\big) \wedge \mathrm{f}(n) \in \Omega\big(\mathrm{g}(n)\big)$$

Dokažte nebo vyvraťte: $n^2 = O(n^3)$

- Myslíme si, že platí. Jak to dokážeme?

- Z definice:
  - $n^2 = O(n^3) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0: 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$
- Je to tvrzení typu „Existuje … takové, že platí …“
- Tudíž jej okážeme tak, že najdeme konkrétní c a n_0 splňující:
$$\forall n \geq n_0: 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$$
- Pro $n \geq 0$ je $n^2 \leq c \cdot n^3$ právě tehdy, když $1 \leq c \cdot n$ (krácení)
  - $0 \leq n^2$ platí pro každé n
- Tudíž například pro $c = 1$ a $n_0 = 1$ tvrzení platí.
- Ukázali jsme, že tvrzení $\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0: 0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$ platí, a proto $n^2 = O(n^3)$.

Dokažte nebo vyvraťte: $n^3 = O(n^2)$

- Myslíme si, že neplatí. Jak to dokážeme?
- Dokážeme, že $n^3 \neq O(n^2)$.
- Z definice (negace definice):
  - $n^3 \neq O(n^2) \Leftrightarrow \neg\,(\exists c > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^3 \leq c \cdot n^2)$
    $\Leftrightarrow \quad \forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 : (0 > n^3) \vee (n^3 > c \cdot n^2)$
- Potřebujeme tedy dokázat:
  - $\forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 : (n^3 > c \cdot n^2)$
- Je to tvrzení typu „Pro každé … platí …“
- Dokážeme „hrou s protivníkem“:
  - Protivník nám dá nějaké c a n_0, my dokážeme, že i pro tyto hodnoty tvrzení platí.
- Mějme tedy c a n_0. Potřebujeme k nim najít $n \geq n_0$ takové, že $n^3 > c \cdot n^2$.
- Pro $n > 0$ platí $n^3 > c \cdot n^2$ právě tehdy, když $n > c$.
- Tudíž, pro daná c a n_0 můžeme použít například $n = \max(n_0, c) + 1$.
- K daným (libovolným) c a n_0 umíme najít n splňující $(n^3 > c \cdot n^2)$.
- Tím jsme dokázali tvrzení $\forall c > 0, n_0 > 0 \quad \exists n \geq n_0 : (n^3 > c \cdot n^2)$ a tedy, že $n^3 \neq O(n^2)$.

Úlohy

Pro každou dvojici funkcí $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ platí:

ⓐ Pokud $f(n) = O(g(n))$, pak $g(n) = O(f(n))$.

ⓑ Pokud $f(n) = O(g(n))$, pak $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

ⓒ Pokud $f(n) = O(g(n))$, pak $g(n) = \Omega(f(n))$.

ⓓ $f(n) = O(f(n)^2)$.

Programování

Úlohy z minula

- Maximum

ReCodEx

- Ověření e-mailu
- Více pokusů
  - Zeptat se, pokud nemůžete najít chybu
- Výpis něčeho navíc (např. „Zadejte číslo: “) – častý důvod, proč řešení neprochází

Domácí úkol

- 2 úlohy z minule – do příště
- Dnes žádný nový nebude

Programování

- Úlohy na práci s `listem` v ReCodExu
- Zprovoznění doma
  - Nainstalovat Python - https://www.python.org/downloads/
  - Nainstalovat IDE – já budu používat https://code.visualstudio.com/download
  - Ve VSCode přidat rozšíření (extension) pro Python

- Terminál
- Debugging
  - Breakpoints
  - Debug režim (F5)