2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD

Celočíselné programy a proč je nechceme (moc) používat

Zbytky z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozhodněte, zda lze a popř. jak:

1. Převést maximalizační LP na minimalizační a naopak.
2. Převést LP, které má všechny proměnné $x \in \mathbb{R}_0^+$, na LP s proměnnými $x' \in \mathbb{R}$ a naopak.
3. Převést LP s podmínkami ve tvaru nerovností a s proměnnými $x \in \mathbb{R}$ na LP, jehož podmínky jsou pouze rovnosti, ale proměnné jsou omezené (a naopak).
4. Převést úlohu LP bez optimalizační klauzule na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

PŘÍKLAD DRUHÝ Formulujte prokládání přímkou jako LP. Máme n bodů v rovině. Najděte přímku (resp. souřadnice přímky), která minimalizuje sumu vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y.

Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu x.

„And now for something completely different…“ (John Cleese, 1971)

PŘÍKLAD TŘETÍ Zformulujte problém batohu pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou váhu a cenu, máme batoh s danou nosností a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče p_i rohlíků a j-tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun.

Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.

Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

PŘÍKLAD PÁTÝ Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

A jak by mohlo vypadat ILP, které spočítá barevnost grafu (tj. minimální k takové, že je graf k obarvitelný)?

PŘÍKLAD ŠESTÝ Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv) x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i | ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

Příklad sedmý **Část 1.** Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$
\begin{aligned}
5x + 3y &\leq 8 \\
2x - 5z &< -3 \\
6x + 5y + 2w &= 5 \\
3z + 2w &> 5 \\
x, y, z, w &\geq 0
\end{aligned}
$$

Jak pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Část 3. Kdy tedy můžeme řešit LP s ostrými nerovnostmi?