6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny a ty jejich stěny

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice $c^T x = b$.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x \mid Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x \in P : c^T x = t$, označíme $\{x \mid c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze $d-1$ nazýváme *fasety*.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\operatorname{conv}(0, (0,0,\ldots,0,1), (0,0,\ldots,1,0), \ldots, (1,0,\ldots,0,0))$$

D: d-dimenzionální *křížový mnohostěn* je konvexní obal všech bodů $\pm e_i$ (pro $i \in 1,\ldots,d$), kde $(e_i)_j = 1$, pokud $i = j$ a 0 jinak. (Tedy ve třech dimenzích jsou to body $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$.)

Ekvivalentně lze křížový mnohostěn napsat jako $\{x \in \mathbb{R}^d \colon |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_d| \leq 1\}$.

PŘÍKLAD PRVNÍ Kvíz na rozehřátí:

a) Jaký je počet stěn 3D krychle? (Odpověď není 6.)
b) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionální krychle, tedy $\mathrm{conv}(\{x|x \in \{0,1\}^d\})$?
c) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionálního křížového mnohostěnu?

PŘÍKLAD DRUHÝ Vlastnosti polytopů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.

PŘÍKLAD TŘETÍ Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

$$\textbf{a)} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Máte mnohostěn $P \in \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů:

$$\begin{aligned} a &= (\ 2,\ 1,\ 6\ ) \\ b &= (\ 0, -5,\ 0\ ) \\ c &= (-2,\ 2, -1\ ) \\ d &= (\ 0, -4,\ 0\ ) \\ e &= (\ 0,\ 1,\ 1\ ) \end{aligned}$$

Pro každou následující nadrovinu určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná a pro tečné nadroviny určete dimenzi příslušné stěny.

a) $5x + 3y - 2z = 1$
b) $x + y - z = 2$
c) $3x + 1z = 0$

PŘÍKLAD PÁTÝ Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jde o všechny:

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3 \\ y + 2z &\leq 2 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d+1$ vrcholů a alespoň $d+1$ faset.

PŘÍKLAD SEDMÝ

a) Ověřte, že d-dimenzionální simplex může být vyjádřen také jako průnik $d+1$ poloprostorů. Jinými slovy, najděte nerovnice, které určují nějaký d-dimenzionální simplex.
b) Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.
c) Určete, kolik stěn dimenze k má d-dimenzionální simplex.