

# 10. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualita

**D:** Mějme lineární program s  $n$  proměnnými a  $m$  podmínkami:

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b \text{ a } x \geq 0 \quad (\text{P})$$

Pak jeho *duálem* nazveme následující lineární program s  $m$  proměnnými a  $n$  podmínkami:

$$\min b^T y \text{ za podmínek } A^T y \geq c \text{ a } y \geq 0 \quad (\text{D})$$

**T(Slabá věta o dualitě):** Mějme maximalizační lineární program (P) a jeho duální (minimalizační) program (D). Pak pro libovolné řešení  $x$  a libovolné řešení duálu  $y$  platí, že  $c^T x \leq b^T y$ .

Jinými slovy, hodnota duálního řešení je horní odhad na hodnotu libovolného primárního řešení.

**T(Silná věta o dualitě):** Pro úlohy (P) a (D) nastane právě jedna z následujících možností:

1. Ani (P), ani (D) nemá přípustné řešení.
2. (P) je neomezená a (D) nemá přípustné řešení.
3. (P) nemá přípustné řešení a (D) je neomezená.
4. Jak (P), tak (D) mají přípustné řešení. Pak existuje optimální řešení  $x^*$  úlohy (P) a optimální řešení  $y^*$  úlohy (D) a platí  $c^T x^* = b^T y^*$ .

<i>Původní program:</i>	<i>V duálu bude:</i>
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
$m$ podmínek $n$ proměnných	$m$ proměnných $n$ podmínek
$i$ -tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
$i$ -tá podmínka má $\geq$	$y_i \leq 0$
$i$ -tá podmínka má $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$j$ -tá podmínka má $\geq$
$x_j \leq 0$	$j$ -tá podmínka má $\leq$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j$ -tá podmínka má $=$

**PŘÍKLAD PRVNÍ**

Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

**PŘÍKLAD DRUHÝ**

Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy MINIMÁLNÍ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ pro vážený graf  $G = (V, E, w)$ . Pro připomenutí, úloha vypadá takto:

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w(v)x_v \\ \forall e = (uv) \in E : x_u + x_v &\geq 1 \\ \forall v \in V : x_v &\geq 0 \end{aligned}$$

*Doplňující otázka:* Jaký problém řeší duální program (pro jednotkové váhy)?

**PŘÍKLAD TŘETÍ** Představme si zadání lineárního programu, jehož řešení zatím neznáme:

$$\max c^T x, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Pomocí duality zkonstruujte nový lineární program, který splňuje:

- neobsahuje účelovou funkci,
- ze souřadnic libovolného přípustného řešení jde vyčíst optimální řešení původního.

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Dokažte nebo vyvráťte tvrzení:

- pro každý lineární program  $L$  platí, že duál duálu  $L$  je původní program  $L$ .
- Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Zformulujte lineární program, který řeší úlohu NEJKRATŠÍ  $s, t$ -CESTA v neorientovaném neohodnoceném grafu. Vysvětlete hlavní ideu vašeho lineárního programu. Až budete mít daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

*Doplňující otázka:* Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?