

11. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita

<i>Původní program:</i>	<i>V duálu bude:</i>
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i -tá podmínka má \leq	$y_i \geq 0$
i -tá podmínka má \geq	$y_i \leq 0$
i -tá podmínka má $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	j -tá podmínka má \geq
$x_j \leq 0$	j -tá podmínka má \leq
$x_j \in \mathbb{R}$	j -tá podmínka má $=$

D(Volnost): Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j -tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x' .

Pak *volnost* (slack) j -té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla \geq , definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řešení.

T(Komplementarita): Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*) . Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

PŘÍKLAD PRVNÍ

Franta uhodl řešení $x = (6, 2, 0)$ následujícího LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{př.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

PŘÍKLAD DRUHÝ Optimální řešení duální úlohy k následující úloze je $(0; 7; 5; 5; 0)$. Spočtete pomocí komplementarity optimální řešení primáru.

$$\begin{aligned} \max & 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, \dots, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD TŘETÍ Pro LP a jeho duál z předchozího příkladu nalezněte dvojici nenulových vektorů x a y takovou, že platí

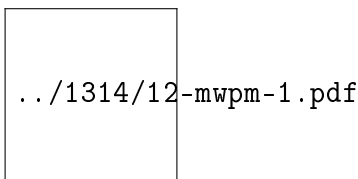
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \quad (1)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \quad (2)$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální.

PŘÍKLAD PÁTÝ (Pro fajnšmekry) Dokažte aproximační verzi komplementarity: Necht' (x, y) jsou přípustná řešení primáru a duálu (LP jsou ve stejném tvaru jako u klasické věty o komplementaritě), která splňují:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i > 0 \quad \vee \quad c_i/\alpha \leq \sum_j a_{ij}y_j \leq c_i \\ \forall j \in \{1, \dots, m\}: y_j > 0 \quad \vee \quad b_j \leq \sum_i a_{ij}x_i \leq \beta b_j \end{aligned}$$

Potom platí $c^T x \leq \alpha \beta c^T x^*$, kde x^* je optimální řešení primáru (jinak řečeno, x je $\alpha\beta$ -aproximací optima).

Hint: Odhadněte $c^T x$ pomocí nerovnic z předpokladů.