Příklady – 11. cvičení

Grafy obecně

Příklad 1

Existuje bipartitní graf s aspoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?

Příklad 2

Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní právě tehdy, když jsou izomorfní jejich doplňky.

Příklad 3

Najděte všechny grafy, které neobsahují indukovanou cestu délky 2.

Příklad 4

Graf G, který je izomorfní svému doplňku $\overline{G}$ se nazývá samodoplňkový. Najděte všechny samodoplňkové kružnice (a dokažte, že žádné jiné neexistují).

Příklad 5

Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Příklad 6

Pro každá dvě přirozená čísla k, n taková, že $k < n$ a $2|kn$, najděte příklad k-regulárního grafu na n vrcholech. k-regulární graf je takový, že všechny jeho vrcholy mají stupeň právě k.

Příklad 7

Ukažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami. *[Hint: Konstruujte podgraf induktivně přidáváním vrcholů]*

Stromy a jiná biologie

Příklad 8

Dokažte: graf G je strom právě tehdy, když G nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Tvrzení dokažte bez použití věty o ekvivalentních definicích stromu, resp., pokud potřebujete některou implikaci z této věty, tak ji celou reprodukujte.

Příklad 9

Ukažte, že každá kostra obsahuje všechny mosty, t.j. hrany, jejichž odebráním se stane graf nesouvislý.

Příklad 10

Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Příklad 11

Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně k, tak potom strom má alespoň k listů.

Příklad 12

Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Příklad 13

Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Příklad 14

Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E_G \setminus E_K$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že jak $(K \setminus e') \cup e$ tak $(K \setminus e'') \cup e$ jsou opět kostry grafu G.