Příklady – 3. cvičení

Příklad 1

Dokažte, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y \Leftrightarrow X = Y$.

Příklad 2

Dokažte $\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 5) \Rightarrow (2^n > n^2)$.

Příklad 3

Určete vlastnosti následujích relací:

(a) $R \subseteq [0,1]^2$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq xy$,

(b) $R \subseteq \{p \,|\, p \text{ je přímka}\}^2$, $(p,q) \in R \Leftrightarrow p$ je kolmá na q,

Příklad 4

Mějme relaci R takovou, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow x^2 \leq y$. Jak se budou lišit její vlastní pro $R \subseteq \mathbb{N}^2$ a pro $R \subseteq [0,1)^2$?

Příklad 5

Buď R, S, T relace na X. Dokažte, že platí:

(a) $(R \cap S)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}$,

(b) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.

Příklad 6

Dokažte, že relace $R \subseteq \mathbb{C}^2$, taková, že $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ je ekvivalence a popište $R[1+i]$. *Pro $x = a + bi$ je $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Příklad 7

Ukažte, že relace $R \subseteq (R^2)^2$ taková, že $(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ je ekvivalence. Jak vypadají její třídy ekvivalence?

Příklad 8

Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích. *[Hint: Vzpomeňte si na třídy ekvivalence a jejich hezké vlastnosti.]*

Příklad 9

Dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

(a) Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y, potom $|X| \leq |Y|$.

(b) Existuje-li zobrazení množiny X na Y, potom $|X| \geq |Y|$.

[Hint: použijte indukci podle velikosti jedné z množin]

Příklad 10

Ukažte, že pro zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě když f je na. Platí totéž i pro nekonečné množiny X? *[Hint: Použijte předchozí příklad a spor]*

Příklad 11

Najděte:

(a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;

(b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$;

(c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)