3. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Velmi křehké relace

Příklad první Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

(a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$
(b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$
(c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,
(d) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělné.

Příklad druhý Buď R a S reflexivní (symetrické, tranzitivní) relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také reflexivní (symetrické)? (a) $R \cup S$, (b) $R \cap S$, (c) $R \setminus S$, (d) $R \triangle S$, (e) $R \circ S$, (f) R^{-1}.

Příklad třetí Buď R antisymetrická relace na množině X. Ukažte, že každá relace $S \subseteq R$ je také antisymetrická.

Příklad čtvrtý Buď R, S, T relace na X. Dokažte, že platí:

(a) $(R \cap S)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}$,
(b) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.

Příklad pátý Dokažte, že relace $R \subseteq X \times X$ je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

Příklad šestý Mějme relaci R takovou, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x^2 \leq y$. Jak se budou lišit její vlastnosti pro $R \subseteq \mathbb{N}^2$ a pro $R \subseteq [0, 1)^2$?

Příklad sedmý Určete počet relací na čtyřech prvcích: (a) všech, (b) reflexivních, (c) symetrických, (d) antisymetrických.