9. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Příklad první Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:
[Hint: Indukce a binomická věta je kamarád, ne žrádlo.]
(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (c) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$
(d) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

Příklad druhý Sečtěte: (a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ (b) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

(c)

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$$

[Hint: Kdyby v tom exponentu bylo $2k$, tak to zní skoro jako binomická věta, co? Kdyby jenom měla rovnice $x^{2k} = (-1)^k$ řešení...]

(d)

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

[Hint: Použijte stejný trik jako v předchozím příkladu, jen vezměte jinou část vzniklé řady.]

Příklad třetí Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Příklad čtvrtý Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek (a chceme rozmístit všech k kuliček). Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Příklad pátý Na výroční schůzi kombinatoriků se sešlo 7 čechů, 6 slováků a 5 maďarů a chtějí vytvořit kalendáře na příštích několik let. Kalendář bude na každý měsíc obsahovat jednu fotografii členů postavených do řady. Na kolik let mohou vytvořit kalendáře, pokud chtějí, aby žádné dvě fotky neobsahovaly stejnou řadu (i přes různé roky)? Na kolik let dokáží vytvořit kalendáře, pro širokou veřejnost, která nedokáže od sebe rozlišit osoby stejné národnosti?

Příklad šestý Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Příklad sedmý Dokažte následující rovnost (pro $n \in \mathbb{N}, k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, k_i \in \mathbb{N}$):

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \binom{n-1}{k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m} + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m} + \cdots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m - 1}.$$