

10. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

PIE a jiné sladké pečivo

PŘÍKLAD PRVNÍ Na výroční schůzi kombinatoriků se sešlo 7 česků, 6 Slováků a 5 Maďarů a chtějí vytvořit kalendáře na příštích několik let. Kalendář bude na každý měsíc obsahovat jednu fotografii členů postavených do řady. Na kolik let mohou vytvořit kalendáře, pokud chtějí, aby žádné dvě fotky neobsahovaly stejnou řadu (i přes různé roky)? Na kolik let dokáží vytvořit kalendáře, pro širokou veřejnost, která nedokáže od sebe rozlišit osoby stejné národnosti?

PŘÍKLAD DRUHÝ Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte následující rovnost (pro $n \in \mathbb{N}, k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, k_i \in \mathbb{N}$):

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \binom{n-1}{k_1-1, k_2, \dots, k_m} + \binom{n-1}{k_1, k_2-1, \dots, k_m} + \dots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \dots, k_m-1}.$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Na koncertě se sešlo 24 death metalistů, 15 folkařů, 40 milovníků poníků a 10 náhodných kolemjdoucích. Kolik lidí bylo na koncertě, pokud víme, že folkaři nenávidí poníky, každý druhý death metalista je milovník poníků, náhodní kolemjdoucí nemají nic společného s ostatními třemi skupinami a jen jediný člověk je vyznavačem jak folku, tak death metalu?

PŘÍKLAD PÁTÝ Kolik čísel zbyde z $1, \dots, 999$ po vyškrtání násobků 2, 3, 5 a 7? A jak to bude obecně pro $1, \dots, n$?

PŘÍKLAD ŠESTÝ Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

PŘÍKLAD SEDMÝ Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov (a) BAR, DEN, RAZIE (b) ARZEN, DRAK, DŮM, DŮRAZ

PŘÍKLAD OSMÝ Kolika způsoby lze postavit do řady 5 Čechů, 4 Slováci a 3 Maďary tak, aby všichni příslušníci stejného národa nestáli vedle sebe? Nejdříve předpokládejte, že osoby stejné národnosti jsou nerozlišitelné, potom předpokládejte, že jsou všechny osoby různé.

PŘÍKLAD DEVÁTÝ Matematik M žije na čtvercové síti o rozměrech 7×5 . Každý den chodí ze svého domu v levém dolním rohu do své pracovny v pravém dolní rohu, přičemž každý den chce jít jinou cestou. Za jak dlouho se bude muset přestěhovat na jinou mřížku, když mu jeho OCD dovoluje chodit pouze po hranách mřížky, a to jen nahoru nebo doprava? (Dvě cesty se liší, pokud se liší alespoň v jednom bodě.)

PŘÍKLAD DESÁTÝ Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit 0 až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-black) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládáme-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín $3C+2Y+M+K$ je stejný jako $2C+Y+3K$.)

PŘÍKLAD JEDENÁCTÝ Do pořadu Výměna manželek se přihlásilo n párů. Kolika způsoby mohou producenti manželům přiřadit jiné manželky (podotýkáme, že manželství homosexuálních párů ještě nebylo uzákoněno)?