

## 12. CVIČENÍ Z DISKRÉTKY

Stromy, kostry a jiná biologie

**PŘÍKLAD PRVNÍ** Najděte všechny grafy, které neobsahují indukovanou cestu délky 2.

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Ukažte, že každý graf s  $m$  hranami má bipartitní podgraf s alespoň  $\frac{m}{2}$  hranami. [Hint: *Konstruuje podgraf induktivně přidáváním vrcholů*]

**PŘÍKLAD TŘETÍ** Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent souvislosti.

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Ukažte, že každá kostra obsahuje všechny mosty, t.j. hrany, jejichž odebráním se stane graf nesouvislý.

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Mějme strom s  $l$  listy a  $v$  vnitřními vrcholy, přičemž všechny vnitřní vrcholy mají stupeň tři. Dokažte, že pak platí  $l = v + 2$ .

**PŘÍKLAD ŠESTÝ** Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně  $k$ , tak potom strom má alespoň  $k$  listů. [Hint: *Skoroindukce přes  $k$ . Zkuste se zamyslet, co se stane, když vrcholu stupně  $k$  budete postupně snižovat stupeň vhodnou úpravou stromu.*]

**PŘÍKLAD SEDMÝ** Ukažte, že pro každý strom s  $n$  vrcholy existuje pořadí vrcholů  $\{v_1, \dots, v_n\}$  takové, že pro každé  $i > 1$  platí, že  $v_i$  má právě jednoho souseda v množině  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . [Hint: *V rodokmenu má každý jen jednu biologickou matku. . .*]

**PŘÍKLAD OSMÝ** Buď  $G$  souvislý graf váhami na hranách a pro libovolnou  $U, W \subseteq V$  označme  $E(U, W) = \{\{x, y\} \in E \mid x \in U, y \in W\}$ . Dokažte, že potom pro libovolnou nejlehčí kostru  $K$  platí, že  $\forall W \subseteq V, W \neq \emptyset$   $K$  obsahuje nějakou nejlehčí hranu z  $E(W, V \setminus W)$ .

**PŘÍKLAD DEVÁTÝ** Ukažte, že pro každou kostru  $K$  grafu  $G$  a hranu  $e \in E_G \setminus E_K$  existují dvě hrany kostry  $e'$  a  $e''$  takové, že jak  $(K \setminus e') \cup e$  tak  $(K \setminus e'') \cup e$  jsou opět kostry grafu  $G$ .

**PŘÍKLAD DESÁTÝ** Mějme posloupnost čísel  $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  takovou, že  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ . Dokažte, že  $(d_1, \dots, d_n)$  je skóre stromu.