Lebesgueovsky neměřitelné množiny

Jonathan Verner
jonathan.verner@matfyz.cz, http://jonathan.verner.matfyz.cz

Motivace

Lebesgueova míra nám umožňuje porovnávat „velikost“ objektů. Na rozdíl od pojmu mohutnosti má intuitivní geometrickou motivaci — zobecňuje pojem délky (resp. obsahu v $\mathbb{R}^2$ nebo objemu v $\mathbb{R}^3$). Zároveň je míra jemnějším prostředkem pro rozlišování mezi nespočetnými množinami. Přijmeme-li např. hypothesu kontinua, jsou všechny nespočetné podmnožiny reálné přímky nerozlišitelné z hlediska mohutnosti, míra mezi nimi rozlišuje velmi jemně. Ukážeme si, že narozdíl od mohutnosti, má jednu nevýhodu. Přijmeme-li axiom výběru, jsou každé dvě množiny porovnatelné z hlediska mohutnosti, ne však z hlediska míry. Ukazuje se totiž, že axiom výběru nám umožňuje zkonstruovat tak „divoké“ množiny, že je nelze „rozumě“ měřit, t.j. jsou lebesgueovsky neměřitelné. Tato skutečnost vede k nepříjemným paradoxům. Lze například rozřezat kouli na pět částí a pak tyto části přeskládat tak, že vznikne koule o poloměru dvakrát větším než byl původní. Na první pohled se to zdá divné. Součet objemů těch pěti částí by přeci měl zůstat nezměněn. Trik spočívá v tom, že tyto části jsou voleny tak (umožňuje nám to axiom výběru), že „nemají objem“, t.j. jsou lebesgueovsky neměřitelné. V následující části dokážeme existenci neměřitelné množiny na reálné přímce. Uvedu dva poněkud rozdílné důkazy. První (tzv. Vitaliho konstrukce) využívá algebraickou strukturu reálných čísel a invariantnost lebesgueovy míry vůči posunutí. Druhá (tzv. Bernstainova konstrukce) využívá topologické struktury reálných čísel. Podstatné na obou konstrukcích je však použití axiomu výběru. Pokud bychom přijali negaci axiomu výběru, je bezesporné (pokud ovšem jsou bezesporné ostatní axiomy teorie množin) předpokládat, že všechny podmnožiny reálné přímky jsou lebesgueovsky měřitelné. Spolu s axiomem výběru totiž zmizí všechny „ošklivé“ množiny, které v konstrukci využíváme.

Jedna z možných cest, jak se neměřitelným množinám vyhnout je přijmout místo axiomu výběru axiom determinovanosti. Tento axiom v podstatě tvrdí, že každá nekonečná hra má vyhrávající strategii. Je zajímavé, že ačkoliv zdánlivě naprosto nesouvisí s měřitelností, vede k negaci axiomu výběru a k měřitelnosti každé množiny. Pokud ho však přijmeme, mnoho si nepomůžemem. Nejen, že nebudeme moci dokázat velké množství (často základních) vět, ale navíc vlastnost, kterou získáme pro lebesgueovu míru, ztratíme pro mohutnost — ne každé dvě množiny budeme moci porovnávat z hlediska mohutnosti.

Vitaliho konstrukce neměřitelné množiny

Myšlenka této kostrukce je následující. Zkonstruuji takovou omezenou množinu, která bude disjunktní s každým svým posunutím o racionální číslo. Dále zaručím, že pokud jí budu posouvat o racionální čísla, pokryji interval kladné míry. Protože je lebesgueova míra translačně invariantní, mají všechna posunutí jedné množiny stejnou míru. A proto už jsem skoro hotov Spočetné disjunktní sjednocení množin stejné míry má buď nekonečnou nebo nulovou míru — nemůže tedy pokrývat interval kladné konečné délky, musí tedy tyto množiny být neměřitelné.

Provedení je převzato z Věty 31 v JII, str. 66. Nejdříve zavedu jednoduché značení a pak přistoupím k důkazu. Některá pomocná tvrzení dokáži v dodatku, abych tím příliš nepřerušoval vlastní důkaz.

Definice 1 (Značení) V následujícím textu budu velmi často pracovat s posunutím množiny. Zavedu proto nyní jednoduché označení:

(i) Pro $M \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ definujeme **posunutí množiny** M o x:

$$x + M := \{y + x : y \in M\}$$

Reálná čísla budu označovat písmeny z konce abecedy $(x, y, z \ldots)$ a racionální čísla písmeny z prostředku abecedy $(p, q, \ldots)$. Připomenu nyní některá tvrzení a definice, která budu potřebovat:

Definice 2 Míra μ na $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n(\mathbb{R}))$ je **translačně invariantní**, pokud pro $M \in \mathfrak{A}, x \in \mathbb{R}^n$ jest $\mu(M) = \mu(x+M)$, t.j. posunutím množiny nezměním její míru. Tato definice je korektní, protože posunutí měřitelné množiny je měřitelné, viz dodatek.

Věta 1 Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je podmnožina reálné přímky s kladnou mírou, t.j. $\lambda(A) = c > 0$. Pak existuje neměřitelná $O \subseteq A$.

Dk. Nejdříve zkonstruujeme A', omezenou podmnožinu A kladné míry. Množina A je disjunktně pokryta polouzavřenými intervaly délky jedna s celými čísly jako koncovými body. Alespoň jeden interval proto musí A protnout na množině kladné míry. Formálně:

$$A = \left(\bigcup_{-\infty}^{+\infty} [n, n+1) \right) \cap A = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} ([n, n+1) \cap A)$$

Protože sjednocení na pravé straně je disjunktní a množina A má kladnou míru, musí mít alespoň jeden člen tohoto sjednocení kladnou míru. Zvolme tedy pevně $n \in \mathbb{N}$ tak aby $\lambda([n, n+1) \cap A) = d > 0$ a označme

$$A' = [n, n+1) \cap A.$$

Našli jsme omezenou $A' \subseteq [n, n+1)$ kladné míry, která je podmnožinou původní množiny A.

Nyní definujme následující relaci:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} \iff x \in y + \mathbb{Q}$$

Tedy x, y jsou v této relaci, pokud je jejich rozdíl racionální číslo. Relace $\sim$ je ekvivalence (důkaz je jednoduchý, viz dodatky), tedy určuje disjunktní rozklad $\mathbb{R}/\sim$ na třídy ekvivalence. Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje třída ekvivalence $[x]$ taková, že $x \in [x]$ a pro $x \not\sim y$ platí $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Podle axiomu výběru existuje na systému $\mathbb{R}/\sim$ selektor, to jest funkce $f : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}$, která z každé třídy ekvivalence $[x]$ vybere jednoho zástupce $f([x]) \in [x]$.

Položme $M := f(\mathbb{R}/\sim)$. Tedy v M je z každé třídy ekvivalence právě jeden zástupce — platí

$$x, y \in M \ \&\ x \sim y \Rightarrow x = y.$$

Jinými slovy, žádná dvě různá čísla v M se neliší o racionální číslo. Bez újmy na obecnosti mohu zvolit selektor f tak, aby M celá padla do intervalu $[n, n+1)$. Pokud by totiž pro nějakou třídu $[x]$ platilo $f([x]) = y \notin [n, n+1)$, lze v $[n, n+1)$ zvolit bod $z = n + y - \mathrm{int}(y)$ takový, že $z \sim y$. Selektor f pak předefinuji na třídě $[x]$ tak, že $f([x]) = z$. Jinými slovy z každé třídy ekvivalence mohu vybrat zástupce, který padne do intervalu $[n, n+1)$.

Označme $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ množinu racionálních čísel z intervalu $[-1, 1]$ a pro $q \in \mathbb{Q}$ nechť $M_q = q + M$. Dokážu nyní dvě jednoduchá (ale důležitá) tvrzení:

(i)
$$(\forall p, q \in \mathbb{Q})(p \neq q \ \Rightarrow\ M_q \cap M_p = \emptyset)$$

(ii)
$$[n, n+1) \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_1} M_q \subseteq [n-1, n+2),$$

t.j. množina M je disjunktní se svým posunutím o racionální číslo a zároveň všechna posunutí množiny M o racionální čísla z intervalu $[-1,1]$ pokrývají celý interval $[n,n+1)$ a zároveň jsou omezená.

Dk.

(i) Nechť pro nějaké $p,q \in \mathbb{Q}$ je $x \in M_q \cap M_p$. Pak ale podle definice x je tvaru $z+q$, kde $z \in M$ a zároveň tvaru $z'+p$, kde $z' \in M$. Pak $x = z+q = z'+p$ tedy $z = z'+(q-p)$. Pak ale $z \sim z'$ a podle definice M je $z = z'$ a tedy i $p = q$, což jsme chtěli.

(ii) Buď $x \in [n,n+1)$. Máme dokázat, že x padne i do zmíněného sjednocení. Z M vyberu y takové, že $x \sim y$, tedy $y = f([x])$. Protože $M \subseteq [n,n+1)$ (volba M) a protože $y \sim x$ dostaneme, že $x-y \in \mathbb{Q}_1$. Pak ale $x \in \{(x-y)+z : z \in M\} = (x-y)+M = M_{(y-x)}$ (pro $z = y$) tedy je i ve sjednocení. Pro druhou inklusi si stačí uvědomit, že ve sjednocení budou čísla tvaru $z+q$, kde $z \in M \subset [n,n+1)$, $|q| \leq 1$, $q \in \mathbb{Q}$. Všechna tato čísla však padnou do intervalu $[n-1,n+1)$, protože $(n-1 \leq z+q < (n+1)+1.)$

Podobně jako jsme zkonstruovali A' zkonstruujeme nyní množinu $P \subseteq A' \cap M_p$ která má kladnou míru: Podle (ii) platí

$$A' = [n,n+1) \cap A' = \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_1} M_q\right) \cap A' = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_1} M_q \cap A',$$

kde sjednocení na pravé straně je disjunktní (i). Předpokládejme pro spor, že každá z množin $M_q \cap A'$ je měřitelná. Dále A' má kladnou míru, tedy musí existovat $p \in \mathbb{Q}_1$ takové, že množina $M_p \cap A'$ má kladnou míru. Zvolme takové $p \in \mathbb{Q}_1$ pevně a položme

$$P = M_p \cap A' \subset [n-1,n+2).$$

Opět označme $P_q = q+P$. Nyní předně $0 < b = \lambda(P) = \lambda(q+P) = \lambda(P_q)$. Dále

$$P_q \cap P_l = (q+(M_p \cap A')) \cap (l+(M_p \cap A')) \subseteq (q+M_p) \cap (l+M_p) = M_{p+q} \cap M_{l+p} = \emptyset,$$

pro $p \neq l$. Podobně jako v (ii) se dokáže

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_1} P_q \subseteq [n-2,n+3)$$

Protože toto sjednocení je disjunktní a protože míra je monotonní vzhledem k inklusi, musí být

$$5 = \lambda([n-2,n+3)) \geq \lambda\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_1} P_q\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}_1} \lambda(P_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}_1} b = \infty$$

což je spor. Tedy alespoň jedna z množin $A' \cap M_q$ je neměřitelná. Tato množina však patří do A' tedy patří i do A což jsme chtěli ukázat.

Dodatky k Vitaliho konstrukci

Definice 3 Funkce $f : (X,\mathfrak{A}) \to (Y,\mathfrak{C})$ je **měřitelná** (vzhledem k $\mathfrak{A},\mathfrak{C}$), pokud pro každou $C \in \mathfrak{C}$ platí $f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$. Slovy: funkce je měřitelná, pokud vzor měřitelné množiny je měřitelná množina.

Pozn. 1 Podmínku definice stačí ověřovat pro množiny generující sigma algebru $\mathfrak{C}$.

Věta 2 Spojité funkce na $\mathbb{R}^n$ jsou měřitelné vzhledem k Borelovské sigma algebře na $\mathbb{R}^n$.

Dk. Borelovská sigma algebra na $\mathbb{R}^n$ je generována otevřenými množinami a vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení je otevřená, tedy je spojitá funkce měřitelná.

Věta 3 Nechť $M \in \mathfrak{B}^n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n$ pak $z+M \in \mathfrak{B}^n(\mathbb{R})$. Slovy: Posunutí měřitelné množiny je měřitelná množina.

Dk. Položme $f(x+z) = x$, tedy $f(x) = x-z$ a $f(z+M) = M$. Nyní f je zjevně spojitá na $\mathbb{R}^n$, tedy je měřitelná a vzor měřitelné je měřitelná, tedy $f^{-1}(M)$ je měřitelná. Ale

$$f^{-1}(M) = \{x : x-z \in M\} = \{x : x = y+z, z \in M\} = z+M.$$

Tedy $z+M$ je měřitelná.

Věta 4 Relace $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ je ekvivalence.

Dk. Předně je reflexivní $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, dále je symetrická: $x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$ a transitivní: $x - y \in \mathbb{Q}$ & $y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - z = x - y + y - z \in \mathbb{Q}$.

Bernsteinova konstrukce neměřitelné množiny

Základní myšlenka této konstrukce je svým způsobem jednodušší. K precisnímu důkazu je ale potřeba několi ne zcela triviálních vět. Tuto konstrukci jsem převzal z [TM], str. 210–211, kde je možno nalézt i obecnější formulaci zmiňovaných vět. Konstrukce vychází z existence rozkladu $\mathbb{R}$ na dvě disjunktní množiny $B_1 \cup B_2 = \mathbb{R}$ takové, že každá z nich protne všechny nespočetné uzavřené množiny. Ukážeme (sporem), že tyto množiny jsou neměřitelné. Libovolná množina kladné míry obsahuje uzavřenou množinu kladné míry, musí tedy být $\lambda(B_1) = 0$. Neboť je-li $F \subseteq B_1$ pak F je spočetná (jinak $F \cap B_2 \neq \emptyset$, tedy $B \not\subseteq B_1$) tedy má míru nula. Každá uzavřená podmnožina B_1 má míru nula, tedy i B_1 má míru nula. Podobně se ukáže, že B_2 má míru nula. To je ale spor, neboť

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda(B_1 \cup B_2) = \lambda(B_1) + \lambda(B_2) = 0.$$

Jsou tedy obě množiny neměřitelné. K dokončení důkazu nyní stačí dokázat existenci zmiňovaného rozkladu. Dále bych měl dokázat, že každá množina kladné míry obsahuje uzavřenou množinu kladné míry. Toto tvrzení je důsledkem jedné z vět v teorii míry a nebudu ho proto dokazovat. V následujících větách s proto budu zabývat pouze zmiňovaným rozkladem. Než je dokáži, zavedu některé běžné množinové konvence.

Řeckými písmeny $(\kappa, \lambda, \ldots)$ budu značit kardinály (t.j. mohutnosti). Na každém kardinálu máme dobré ostré uspořádání relací $\in$. Budu je značit $\alpha < \beta$, t.j.

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta,$$

pro každé dva kardinály $\alpha, \beta \in \kappa$.

Každou množinu A mohutnosti κ lze nyní „očíslovat“ pomocí menších kardinálů, t.j.

$$A = \{a_\alpha; \alpha \in \kappa\}$$

Dalším pojmem, který užiji, je maximo-lexikografické uspořádání. Na kartézském součinu $\kappa \times \kappa$ definujeme uspořádání takto:

$$\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle \iff \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \ \&\ \min\{\alpha, \beta\} < \min\{\gamma, \delta\}).$$

Dvě dvojice tedy porovnám tak, že nejdříve porovnám největší čísla a v případě shody nejmení čísla z každé dvojice. Je jednoduché ukázat, že takovéto uspořádání na $\kappa \times \kappa$ je opět ostré, dobré uspořádání. Přistupme nyní k formulaci výše zmíněných vět.

Věta 5 (Lemma o disjunktním zjemění) Nechť $(A_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ je soubor κ množin (t.j. mohutnost tohoto souboru je právě κ, pro naše účely stačí $\kappa = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$) z nichž každá má mohutnost κ. Pak existuje tzv. *disjunktní zjemění*, to jest soubor vzájemě disjunktních množin $(B_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ z nichž každá má opět mohutnost κ ($|B_\alpha| = \kappa$) a pro každé α je $B_\alpha \subseteq A_\alpha$.

Dk. Myšlenka důkazu je jednoduchá. Stačí najít prosté zobrazení

$$f : \kappa \times \kappa \to \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha,$$

splňující

$$(*) \qquad f(\alpha, \beta) \in A_\alpha.$$

Pak položíme

$$B_\alpha = \{f(\alpha, \beta); \beta < \kappa\}.$$

Protože je f prostá, je $|B_\alpha| = \kappa, B_\alpha \subseteq A_\alpha$ a $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ pro $\alpha \neq \beta$.

Uvažujme nyní všechna prostá zobrazení splňující $(*)$, jejichž definičním oborem je nějaká dolní množina $G \subset \kappa \times \kappa$ v maximo-lexikografickém uspořádání, t.j. $(\exists g \in \kappa \times \kappa)(G = \{c \in \kappa \times \kappa; c < g\})$. Označme množinu těchto zobrazení S. Tato množina je částečně uspořádána inklusí ($f_1 \subseteq f_2$ pokud definiční obor f_1 je podmnožinou definičního oboru f_2 a f_2 se na $Dom(f_1)$ shoduje s f_1). Snadno se ověří, že S splňuje předpoklady zornova lemmatu, tedy má maximální prvek. Označme tento prvek f a ukažme, že je to hledaná funkce. Zřejmě je prostá (protože patří do S) stačí tedy ukázat, že už je definovaná na celém $\kappa \times \kappa$. Není-li pro spor definovaná na celém $\kappa \times \kappa$, pak protože m-l. uspořádání je dobré, existuje nejmenší dvojice $\langle \alpha, \gamma \rangle$ která nepatří do definičního oboru f. Pak má definiční obor f mohutnost menší než kappa, tedy obraz f má mohutnost menší než kappa a protože $|A_\alpha| = \kappa$ existuje $x \in A_\alpha$ který nepadne do obrazu f. Pak můžeme zobrazení f prodloužit položením $f(\alpha, \gamma) = x$, což je spor s maximalitou f. Důkaz je hotov.

Pokročíme nyní k větě, která nám umožní dokázat existenci rozkladu reálných čísel, který jsme použili při konstrukci neměřitelných množin. Nechť nyní κ je mohutnost kontinua.

„Očíslujme“ si všechny nespočetné uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}$: $(A_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ buď soubor všech nespočetných uzavřených podmnožin v $\mathbb{R}$. To lze, neboť všech uzavřených podmnožin $\mathbb{R}$ je pouze kontinuum. Víme, že každá uzavřená nespočetná podmnožina $\mathbb{R}$ má mohutnost kontinua (Pokud to nevíme, předpokládejme platnost hypothesy kontinua. Pak je to zjevné.), tedy $(A_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ je soubor κ množin mohutnosti κ a lze použít předchozí větu. Ta nám poskytne disjuntní zjemění $(B_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$. Každou množinu B_α disjunktně rozložme $B = C_\alpha \cup D_\alpha$ na dvě množiny mohutnosti κ, t.j. $|C_\alpha| = |D_\alpha| = \kappa$. Položme nyní $C = \bigcup_{\alpha \in \kappa} C_\alpha$ a $D = (\bigcup_{\alpha \in \kappa} D_\alpha) \cup \mathbb{R} \setminus C$. Máme $C \cap D = 0, C \cup D = \mathbb{R}$ a C i D protínají každou nespočetnou uzavřenou množinu v $\mathbb{R}$, tedy tvoří hledaný rozklad.

Literatura

[JII] Jarník, Vojtěch: *Integrální počet II*, Nakladatelství československé akademie věd, Praha 1955

[TM] Balcar, Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, 2000